1963 г. июль — август *т. XVIII, вып. 4 (112)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ОДНИ И ТЕ ЖЕ ЧИСЛА

В. Н. Тимофеев

В одной из работ Б. Н. Делоне [1], [2], посвященной определению квадратичной формы по расстояниям, ставится вопрос о нахождении всех неэквивалентных положительных форм, неразличимых по расстояниям, т. е. форм, представляющих одни и те же числа.

Для бинарных положительных форм в этой работе проводится полное геометрическое исследование с указанием единственной пары неэквивалентных форм $a(x^2+xy+y^2)$ и $a(x^2+3y^2)$, неразличимых по расстояниям. (Эта пара форм была известна также Шерингу [3].) Там же приводятся примеры пар форм указанного типа и для тройничных положительных форм.

В нашей заметке мы дадим другие примеры тройничных положительных форм, которые представляют одни и те же числа.

1. Форму F преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y', \\ z &= y' - mz' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

переводит в форму F_1. Обратное преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{y-z}{m}\,. \end{aligned}\right| \tag{2}$$

Из (1) следует, что любое число, представимое формой F' (рассматриваются целые представления (x, y, z)), представимо и формой F.

Допустим, что форма F представляет число N, причем среди представлений (x, y, z) найдется такое, что $y \equiv z \pmod m$; тогда и форма F' представляет N, как видно из (2). Если это имеет место для любого N, представимого F, тогда формы F и F' представляют одни и те же числа. Формы F и F' неэквивалентны, так как имеют различные определители.

2. Форма

$$F = a(x^2+y^2+z^2) + 2b(xy+yz+zx)$$

переходит сама в себя при любой перестановке x, y, z; поэтому среди представлений числа N формой F всегда найдется такое, в котором $y \equiv z \pmod 2$. Значит форма F и форма F', полученная из F с помощью (1) (при $m = 2$), представляют одни и те же числа.

Форма

$$F' = a(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4yz) + 2b(y^2 + 2xy - 2yz - 2zx)$$

эквивалентна форме

$$F_1 = a(x^2 + 2y^2 + 2z^2) + 2b(y^2 - z^2 + 2xy),$$

в которую она переводится подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Форма $F = a(x^2 + y^2 + z^2)$ не меняется при любой перестановке x, y, z и любом изменении их знаков. F принадлежит к формам вида $a(x^2 + y^2 + z^2) + 2b(xy + yz + zx)$, поэтому формы $F' = a(x^2 + 2y^2 + 2z^2)$ и F представляют одни и те же числа.

Пусть (x, y, z) — одно из представлений числа N формой F. Среди чисел $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ всегда найдется пара, разность которых сравнима с нулем по модулю 3. Беря эти числа за y и z, мы получим представление числа N, в котором $y \equiv z \pmod 3$. Значит, форма $F'' = a(x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 6yz)$, полученная из F с помощью (1), представляет те же числа, что и F. F'' эквивалентна форме $F_1 = a(x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2yz)$.

4. Рассмотрим теперь форму $F = a(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$. Автоморфизмами этой формы являются любые перестановки x, y, z и, кроме того

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Форма F принадлежит к формам п. 2, поэтому формы

$$F' = a(x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy)$$

и F представляют одни и те же числа.

Среди чисел x, y, $z - (x + y + z)$ у двух по крайней мере разность $\equiv 0 \pmod 3$. Кроме того, среди этих же чисел найдется два, разность которых $\equiv 0 \pmod 4$. Значит, формы

$$F'' = a(x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 2xy - 9yx - 3zx),$$
$$F''' = a(x^2 + 3y^2 + 16z^2 + 2xy - 12yz - 4zx),$$

полученные из F с помощью (1) при $m = 3$ и $m = 4$, представляют те же числа, что и F'. Формы F', F'', F''' эквивалентны формам

$$F_1 = a(x^2 + 2y^2 + z^2),$$
$$F_2 = a(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2yz - zx),$$
$$F_3 = a(x^2 + 2y^2 + 4z^2),$$

в которые они переходят с помощью перестановок

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак, формы, содержащиеся в каждой из трех следующих групп:

$$1)\quad \begin{cases} a\,(x^2+y^2+z^2)+2b\,(xy+yz+zx),\\ a\,(x^2+2y^2+2z^2)+2b\,(y^2-z^2+2xy),\end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} a\,(x^2+y^2+z^2),\\ a\,(x^2+2y^2+2z^2),\\ a\,(x^2+2y^2+5z^2-2yz),\end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} a\,(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx),\\ a\,(x^2+2y^2+z^2),\\ a\,(x^2+2y^2+3z^2-2yz-zx),\\ a\,(x^2+2y^2+4z^2),\end{cases}$$

представляют одни и те же числа.

Первые две формы из третьей группы приводятся в указанной работе Б. Н. Делоне.

Поступило в редакцию 26 сентября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Делоне, К вопросу об однозначности определения основного параллелепипеда кристаллической структуры по способу Дебая, Зап. Российск. Минералог. об-ва (1926).

[2] Б. Н. Делоне, Геометрия положительных квадратических форм, Дополнение, УМН, вып. IV (1938).

[3] M. Schering, Théorémes relatifs aux formes quadratiques qui représentent les mêmes nombres, Journ. Math. pures et appl., 2 série 4 (1859).