It would seem interesting to prove this theorem by using corresponding l-adic L-functions (partly done by Ferrero [2, p. 21, Proposition]).

References

1. B. Ferrero and L. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.* **109** (1979), 377–395.
2. B. Ferrero, Iwasawa invariants of abelian number fields, *Math. Ann.* **234** (1978), 9–24.
3. R. Gold, The nontriviality of certain $\mathbf{Z}_l$-extensions, *J. Number Theory* **6** (1974), 369–373.
4. K. Iwasawa, A note on the group of units of algebraic number field, *J. Math. Pures Appl.* **35** (1956), 189–192.
5. K. Iwasawa, On the μ-invariants of $\mathbf{Z}_l$-extensions, *in* "Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra," pp. 1–11, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
6. K. Iwasawa, On $\mathbf{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.* **98** (1973), 246–326.
7. H. Yokoi, On the class number of a relatively cyclic number field, *Nagoya Math. J.* **29** (1967), 31–44.

JOURNAL OF NUMBER THEORY **12**, 529–540 (1980)

Darstellung durch Spinorgeschlechter ternärer quadratischer Formen

Rainer Schulze-Pillot

Mathematisches Institut der Georg-August-Universität, Bunsenstraße 3/5, Göttingen D-3400, West Germany

Communicated by M. Kneser

Received September 10, 1979

Let V be a regular ternary quadratic space over the algebraic number field F, L a lattice on V over the maximal order $\mathfrak{o}$ of F. A number a, which is represented by all completions $L_\mathfrak{p}$, is not necessarily represented by L itself, but only by a lattice in the genus of L. We determine in which cases such a number is not represented by all spinor genera in the genus. Theorem 1 repeats the known [8, 3] necessary conditions for this, which show that this behaviour is exceptional. They are sharpened in Theorem 2 to a necessary and sufficient condition in terms of certain groups $\Theta(L_\mathfrak{p}, a)$ (Definition 1). These groups are computed in Theorems 3 and 4 for nondyadic and 2-adic $\mathfrak{p}$. Some applications are given in the last section: We give new proofs (and in one case a correction) of results from [5] on the numbers represented by some genera of positive definite ternaries.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit das Darstelllungsverhalten eines $\mathbb{Z}$-Gitters L auf einem regulären quadratischen Raum V der Dimension 3 über $\mathbb{Q}$ durch das Darstellungsverhalten seiner p-adischen Komplettierungen (p Primzahl oder $p = \infty$) bestimmt wird. Für dim $V \geqslant 4$ gibt es hierüber die Resultate von Tartakovskij [15] (siehe auch [4, 10]) für definites, von Kneser [8] für indefinites V. Für dim $V = 3$ folgt zunächst aus den Ergebnissen von [8], daß die Zahlen, die zwar von allen L_p, nicht aber von allen Spinorgeschlechtern im Geschlecht von L dargestellt werden, in endlich vielen Quadratklassen liegen, die sich effektiv bestimmen lassen (Zahlen mit dieser Eigenschaft nennen wir im folgenden Spinorausnahmen des Geschleschts). Ist V indefinit, so fallen Spinorgeschlecht und Klasse zusammen, im definiten Fall hat Peters unter Annahme einer Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung gezeigt, daß mit

$$\bar{Q}_r(L) := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in Q(L_p) \text{ für alle } p,\ p^r \nmid a \text{ für } p \text{ mit ind } V_p = 0\}$$

0022-314X/80/040529-12\$02.00/0

gilt: $\bar{Q}_r(L) - Q(L)$ enthält außer den Spinorausnahmen des Geschlechts nur endlich viele Elemente. In beiden Fällen ist es von Interesse, zu untersuchen, welche der Zahlen aus den durch [8, Satz 2] gegebenen Quadratklassen tatsächlich Spinorausnahmen sind. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit. Da es keinen zusätzlichen Beweisaufwand bedeutet, ersetzen wir dabei allgemeiner $\mathbb{Q}$ durch einen algebraischen Zahlkörper F und $\mathbb{Z}$ durch die Hauptordnung von F.

Das grundlegende Resultat ist Satz 2, durch den das Problem auf die Berechnung der Spinornormen gewisser spezieller Transformationen aus den $O^+(V_\mathfrak{p})$ zurückgeführt wird. Diese Berechnung erfolgt in Satz 3 und Satz 4, die zusammen mit Satz 2 die vollständige Bestimmung der Spinorausnahmen eines Geschlechts erlauben, sofern F ungerade Absolutdiskriminante hat. Satz 5 liefert ein Ergebnis über Spinorprimitivausnahmen, und zum Schluß werden die Ergebnisse benutzt, um in einigen Beispielen Resultate von Jones und Pall [5] neu zu beweisen bzw. in einem Fall zu korrigieren.

Die Arbeit ist eine Zusammenfassung der Diplomarbeit [14] des Verfassers, die unter Anleitung von Prof. M. Kneser entstand. Ihm möchte ich für einige wertvolle Anregungen herzlich danken.

1. Bezeichnungen

Im folgenden sei stets V ein regulärer quadratischer Raum der Dimension 3 über dem algebraischen Zahlkörper F mit Hauptordnung $\mathfrak{o}$, L ein $\mathfrak{o}$-Gitter auf V. Mit Q und B werden die quadratische Form und die Bilinearform auf V bezeichnet, es gilt $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2B(x, y)$. disc( ) bezeichnet die Diskriminante eines quadratischen Raumes (als Quadratklasse). Mit Ω bzw. S wird die Menge aller bzw. aller nichtarchimedischen Primstellen bezeichnet. J_F ist die Idelgruppe von F. J_V, J_L, P_D sind wie in [12, §101D]. Ist $\Phi = (\Phi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\Omega} \in J_V$, so bezeichnet $\Theta(\Phi)$ die Menge der Idele $j = (j_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\Omega}$ mit $j_\mathfrak{p} \in \Theta(\Phi_\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ (Θ die Spinornorm) und $\Theta(J_L)$ die Vereinigung aller $\Theta(\Phi)$ mit $\Phi \in J_L$. Alle Bezeichnungen, die nicht erklärt werden, haben die gleiche Bedeutung wie in [12].

2. Reduktion auf lokale Berechnungen

Wir erinnern zunächst an den bekannten

Satz 1. *Sei $a \in Q(L_\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$, für $a \neq 0$ sei $d \in -a\,\mathrm{disc}(V)$, $E = F(d^{1/2})$. Dann wird a entweder von allen Spinorgeschlechtern in gen L dargestellt oder genau von der Hälfte. Der letztere Fall tritt höchstens dann ein, wenn gilt:*

$$a \neq 0, \qquad d \notin (F^\times)^2, \qquad \Theta(J_L) \subseteq N_{E/F}(J_E). \tag{1}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so zerfällt das Geschlecht von L in zwei Halbgeschlechter derart, daß für $\Phi \in J_V L$ und $\Phi(L)$ genau dann im selben Halbgeschlecht liegen, wenn $\Theta(\Phi) \subseteq P_D N_{E/F}(J_E)$ gilt. Die Halbgeschlechter bestehen aus vollen Spinorgeschlechtern; zwei Spinorgeschlechter im selben Halbgeschlecht stellen a gleichzeitig dar.

Beweis. Für total indefinites V ist dieser Satz von Kneser in [8] bewiesen worden. Er gilt jedoch genauso ohne diese Voraussetzung, siehe [3].

Bemerkung 1. Zu gegebenem L gibt es nur endlich viele quadratische Erweiterungen E/F mit $\Theta(J_L) \subseteq N_{E/F}(J_E)$, also nach Satz 1 nur endlich viele Quadratklassen, in denen eine Spinorausnahme von gen L liegen kann. Denn da $L_\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p} \in S$ unimodular ist, folgt nach Satz 3 aus [7], daß $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p})) = \mathfrak{u}_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}^\times)^2$ für fast alle $\mathfrak{p} \in S$ gilt, also für ein E, das obiger Bedingung genügt, nur endlich viele $\mathfrak{p} \in S$ als Verzweigungsstellen in Frage kommen. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß es zu gegebener Diskriminante nur endlich viele Erweiterungen von F mit festem Grad über F gibt, erhält man hieraus leicht die Behauptung.

Wir wollen nun untersuchen, wann eine Zahl $a \in F$, die (1) aus Satz 1 genügt, tatsächlich eine Spinorausnahme von gen L ist. Um den hierfür grundlegenden Satz 2 formulieren zu können, benötigen wir die folgende Definition:

Definition 1. Sei $\mathfrak{p} \in S$, $a \in Q(L_\mathfrak{p})$, $x \in L_\mathfrak{p}$ mit $Q(x) = a$. Dann ist die von

$$\{c \in F_\mathfrak{p}^\times \mid \text{es gibt } \varphi \in O^+(V_\mathfrak{p}) \text{ mit } x \in \varphi(L_\mathfrak{p}) \text{ und } c \in \Theta(\varphi)\}$$

erzeugte Untergruppe von $F_\mathfrak{p}^\times$ unabhängig von der Auswahl von x und wird mit $\Theta(L_\mathfrak{p}, a)$ bezeichnet.

Zum *Beweis* der in der Definition enthaltenen Behauptung seien $x, x' \in L_\mathfrak{p}$ mit $Q(x) = Q(x') = a$ und die zu untersuchende Untergruppe von $F_\mathfrak{p}^\times$ vorläufig mit $\Theta(L_\mathfrak{p}, x)$ bzw. $\Theta(L_\mathfrak{p}, x')$ bezeichnet. Sei $\varphi \in O^+(V_\mathfrak{p})$ mit $x \in \varphi(L_\mathfrak{p})$. Nach dem Wittschen Satz gibt es $\psi \in O^+(V_\mathfrak{p})$ mit $\psi(x) = x'$, es gilt $\Theta(\psi) \subseteq \Theta(L_\mathfrak{p}, x')$. Da wegen $x' = \psi(x) \in \psi(\varphi(L_\mathfrak{p}))$ auch $\Theta(\psi\varphi) \subseteq \Theta(L_\mathfrak{p}, x')$ gilt, folgt $\Theta(\varphi) \subseteq \Theta(L_\mathfrak{p}, x')$. Es gilt also $\Theta(L_\mathfrak{p}, x) \subseteq \Theta(L_\mathfrak{p}, x')$, und genauso folgt die andere Inklusion.

Satz 2. *Seien a, d, E wie in Satz 1, für $\mathfrak{p} \in \Omega$ sei $N_\mathfrak{p}(E) := N_{E_\mathfrak{P}/F_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{P}^\times)$*

($\mathfrak{P}$ *eine Fortsetzung von* $\mathfrak{p}$ *auf* E). *Dann gilt: a ist genau dann eine Spinorausnahme des Geschlechts von L, wenn Bedingung* (1) *aus Satz* 1 *erfüllt ist und außerdem*

$$\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) = N_{\mathfrak{p}}(E) \tag{2}$$

für alle $\mathfrak{p} \in S$ *gilt.*

Beweis. Im ganzen Beweis sei (1) stets erfüllt, gen L zerfällt also in der in Satz 1 beschriebenen Weise in zwei Halbgeschlechter. Außerdem nehmen wir o.E. $a \in Q(L)$ an, x sei ein fester Vektor aus L mit $Q(x) = a$. Sei zunächst a keine Spinorausnahme, a werde also von beiden Halbgeschlechtern dargestellt. Dann gibt es $\Psi \in J_V$ mit $\Theta(\Psi) \not\subseteq P_D N_{E/F}(J_E)$ und $a \in Q(\Psi(L))$. Ist $y \in \Psi(L)$ mit $Q(x) = Q(y) = a$, so gibt es nach dem Wittschen Satz $\varphi \in O(V)$ mit $\varphi(y) = x$, und φ kann o.E. in $O^+(V)$ gewählt werden. Mit $\Phi = \varphi\Psi$ gilt dann auch $\Theta(\Phi) \not\subseteq P_D N_{E/F}(J_E)$, es gibt also sicher ein $\mathfrak{p} \in S$ mit $\Theta(\Phi_{\mathfrak{p}}) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$ (an den archimedischen Stellen ist $\Theta(\Phi_{\mathfrak{p}}) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$ wegen (1) automatisch erfüllt), außerdem gilt $x \in \Phi_{\mathfrak{p}}(L_{\mathfrak{p}})$, es folgt also $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$. Ist ungekehrt $\mathfrak{p} \in S$ mit $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \neq N_{\mathfrak{p}}(E)$, so ist $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$, denn mit $U := (Fx)^{\perp}$ gilt sicher $N_{\mathfrak{p}}(E) = \Theta(O^+(U_{\mathfrak{p}})) \subseteq \Theta(L_{\mathfrak{p}}, a)$. Es gibt also $\varphi \in O^+(V_{\mathfrak{p}})$ mit $x \in \varphi(L_{\mathfrak{p}})$, $\Theta(\varphi) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$. Damit definieren wir $\Phi = (\Phi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q} \in \Omega}$ durch:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathfrak{q}} &= \mathrm{Id}_{V_{\mathfrak{q}}} && \text{für } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \\ &= \varphi && \text{für } \mathfrak{q} = \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Dann ist $x \in \Phi(L)$ und offenbar $\Theta(\Phi) \not\subseteq N_{E/F}(J_E)$. Wäre $(b) \in P_D$ ein Hauptidel mit $(b)\ \Theta(\Phi) \subseteq N_{E/F}(J_E)$, so wäre b an genau einer Stelle keine Norm von E nach F, was nach dem HIlbertschen Reziprozitätsgesetz unmöglich ist, also folgt sogar $\Theta(\Phi) \not\subseteq P_D N_{E/F}(J_E)$. Damit liegen aber L und $\Phi(L)$ in verschiedenen Halbgeschlechtern und stellen beide a dar, nach Satz 1 ist a also keine Spinorausnahme.

3. Berechnung von $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a)$

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathfrak{p}$ stets eine nichtdyadische oder 2-adische (d.h., 2 ist Primelement in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$) Primstelle aus S und gleichzeitig das maximale Ideal in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, π ein Primelement in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Ferner ist immer $\mathfrak{s}L_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $a \in Q(L_{\mathfrak{p}})$, $a \neq 0$, d, E wie in Satz 1, $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ auf E, $N_{\mathfrak{p}}(E)$ wie in Satz 2, $\Theta(O^+(L_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$. Zusätzlich nehmen wir $d \notin (F_{\mathfrak{p}}^{\times})^2$ an, da sonst (2) trivialerweise erfüllt ist. Die Bezeichnung $A(b, c)$ wird wie in [12, §93 B] verwendet.

Um Satz 2 anwenden zu können, berechnen wir nun die im vorigen

Abschnitt definierte Gruppe $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a)$ in Abhängigkeit von a und der Jordan-Zerlegung von $L_{\mathfrak{p}}$. Wir formulieren das Ergebnis in den beiden folgenden Sätzen:

Satz 3. *Sei* $\mathfrak{p}$ *nichtdyadisch.*

(a) *Ist $E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt, so ist $\Theta(O^+(L_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$ genau dann, wenn $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle b_1 \rangle \perp \langle \pi^{2r} b_2 \rangle \perp \langle \pi^{2s} b_3 \rangle$ ($b_i \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$, $0 \leqslant r \leqslant s$) gilt, und in diesem Fall ist $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \neq N_{\mathfrak{p}}(E)$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $-b_1 b_2 \in (F_{\mathfrak{p}}^{\times})^2$ *und* $a \in \mathfrak{p}^{2r+1}$,

(ii) $-b_1 b_2 \notin (F_{\mathfrak{p}}^{\times})^2$ *und* $a \in \mathfrak{p}^{2s+1}$.

(b) *Ist $E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$ verzweigt, so folgt aus $\Theta(O^+(L_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$, daß $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle b_1 \rangle \perp \langle \pi^r b_2 \rangle \perp \langle \pi^s b_3 \rangle$ ($b_i \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$, $0 < r < s$) gilt. Gilt $\Theta(O^+(L_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$, so ist $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \neq N_{\mathfrak{p}}(E)$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *r ist gerade,* $a \in \mathfrak{p}^r$.

(ii) *r ist ungerade,* $a \in \mathfrak{p}^s$.

Satz 4. *Sei* $\mathfrak{p}$ *2-adisch.*

(a) *Ist $E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt, so ist $\Theta(O^+(L_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$ genau dann, wenn $L_{\mathfrak{p}}$ nicht unimodular ist und die Jordan-Komponenten von $L_{\mathfrak{p}}$ entweder alle gerade oder alle ungerade Ordnung haben (siehe* [1, *Def.* 3.1]), *in diesem Fall ist $\Theta(L_{\mathfrak{p}}, a) \neq N_{\mathfrak{p}}(E)$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle b_1 \rangle \perp \langle 2^{2r} b_2 \rangle \perp \langle 2^{2s} b_3 \rangle$ ($b_i \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}, 0 \leqslant r \leqslant s$) *und es gilt*

(α) $\mathfrak{d}(-b_1 b_2) = 2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $a \in \mathfrak{p}^{2r}$ *oder,*

(β) $\mathfrak{d}(-b_1 b_2) = 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $a \in \mathfrak{p}^{2s}$ *oder,*

(γ) $-b_1 b_2 \in (F_{\mathfrak{p}}^{\times})^2$, $a \in \mathfrak{p}^{1+2r+2t}$ ($t := \min(1, s-1)$).

(ii) *$L_{\mathfrak{p}}$ läßt sich nicht in eine orthogonale Summe 1-dimensionaler Gitter zerlegen und es gilt:*

(α) $L_{\mathfrak{p}} \cong A(0, 0) \perp \langle 2^{2r+1} b \rangle$ ($b \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$, $r \geqslant 0$), $a \in \mathfrak{p}^{1+s}$ ($s := \min(1, r)$) *oder,*

(β) $L_{\mathfrak{p}} \cong A(2, 2\rho) \perp \langle 2^{2r+1} b \rangle$ ($b \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$, $r \geqslant 0$), $a \in \mathfrak{p}^{2r+1}$ *oder,*

(γ) $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle b \rangle \perp M$ ($b \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$, M $\mathfrak{p}^{2r+1}$-*modular von gerader Ordnung,* $r \geqslant 0$), $a \in \mathfrak{p}^{2r+2}$.

(b) *Ist* $E_\mathfrak{P}/F_\mathfrak{p}$ *verzweigt und* $\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(d)$ *gerade, so folgt aus* $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, *daß*

$$L_\mathfrak{p}\cong\langle b_1\rangle\perp\langle 2^r b_2\rangle\perp\langle 2^s b_3\rangle \qquad (b_i\in\mathfrak{u}_\mathfrak{p}, 0\leqslant r\leqslant s)$$

gilt. Gilt $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, *so ist* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$ *genau dann, wenn mit*

$$K:=\langle 2^{r-2}b_1\rangle\perp\langle 2^r b_2\rangle\perp\langle 2^s b_3\rangle,$$
$$K':=\langle 2^{r}b_1\rangle\perp\langle 2^r b_2\rangle\perp\langle 2^s b_3\rangle$$

eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *r ist gerade*, $\Theta(O^+(K))\not\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $a\in\mathfrak{p}^{r-2}$,

(ii) *r ist gerade*, $\Theta(O^+(K))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $\Theta(O^+(K'))\not\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $a\in\mathfrak{p}^{r}$

(iii) *r ist gerade*, $\Theta(O^+(K))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $\Theta(O^+(K'))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $a\in\mathfrak{p}^{s-2}$

(iv) *r ist ungerade*, $a\in\mathfrak{p}^{r-3}$.

(c) *Ist* $E_\mathfrak{P}/F_\mathfrak{p}$ *verzweigt und* $\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(d)$ *ungerade, so folgt aus* $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, *daß*

$$L_\mathfrak{p}\cong\langle b_1\rangle\perp\langle 2^r b_2\rangle\perp\langle 2^s b_3\rangle(b_i\in\mathfrak{u}_\mathfrak{p}, 0<r<s)$$

gilt. Gilt $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, *so ist* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$ *genau dann, wenn mit*

$$K:=\langle 2^{r-3}b_1\rangle\perp\langle 2^r b_2\rangle\perp\langle 2^s b_3\rangle$$

eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) *r ist gerade*, $a\in\mathfrak{p}^{r-4}$,

(ii) *r ist ungerade*, $\Theta(O^+(K))\not\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $a\in\mathfrak{p}^{r-3}$

(iii) *r ist ungerade*, $\Theta(O^+(K))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, $a\in\mathfrak{p}^{s-4}$.

Beweis. Wir wollen aus Platzgründen nur den Verlauf des Beweises skizzieren (ein vollständiger Beweis mit Durchführung aller Fallunterscheidungen ist in [14] angegeben). Man verschafft sich zunächst mit Hilfe der Ergebnisse aus [1, 7] (für eine Korrektur zu [1, Th. 3.14] siehe [2, 1.2]) eine Übersicht darüber, welche Einschränkungen für die Jordan-Zerlegung von $L_\mathfrak{p}$ aus der Voraussetzung $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$ folgen. Anschließend werden alle diese Jordan-Zerlegungen einzeln diskutiert. Die wesentlichen Hilfsmittel hierfür fassen wir in den drei folgenden Lemmas zusammen, um anschließend die Diskussion in einem typischen Fall, auf den sich außerdem einige andere Fälle zurückführen lassen, durchzuführen.

LEMMA 1. *Gibt es ein Untergitter* $L'_\mathfrak{p}\subseteq L_\mathfrak{p}$ *mit* $a\in Q(L'_\mathfrak{p})$ *und* $\Theta(O^+(L'_\mathfrak{p}))\not\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, *so ist* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$.

LEMMA 2. *Gibt es ein Gitter* $L'_\mathfrak{p}$ *auf* $V_\mathfrak{p}$, *das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt*:

(i) *Zu* $x, y\in L_\mathfrak{p}$ *mit* $Q(x)=Q(y)=a$ *existiert* $\varphi\in O^+(L'_\mathfrak{p})$ *mit* $\varphi(x)=y$,

(ii) $\Theta(O^+(L'_\mathfrak{p}))\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$,

so ist $\Theta(L_\mathfrak{p},a)=N_\mathfrak{p}(E)$.

LEMMA 3. *Ist* $L'_\mathfrak{p}\subseteq L_\mathfrak{p}$ *ein Untergitter, so daß für* $x\in L_\mathfrak{p}$ *mit* $Q(x)=a$ *folgt, daß* $x\in L'_\mathfrak{p}$ *gilt, so ist* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)=\Theta(L'_\mathfrak{p},a)$.

Beweis. Lemma 1 und Lemma 3 sind klar. Zu Lemma 2: Sei $x\in L_\mathfrak{p}$ mit $Q(x)=a$, $\psi\in O^+(V_\mathfrak{p})$ mit $x\in\psi(L_\mathfrak{p})$, $y\in L_\mathfrak{p}$ mit $x=\psi(y)$, $\varphi\in O^+(L'_\mathfrak{p})$ mit $\varphi(x)=y$. Mit $U_\mathfrak{p}:=(F_\mathfrak{p}x)^\perp$ ist $\psi\varphi\in O^+(U_\mathfrak{p})$, also (wegen $N_\mathfrak{p}(E)=\Theta(O^+(U_\mathfrak{p})))$ $\Theta(\psi\varphi)\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$. Wegen $\Theta(\varphi)\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$ folgt dann auch $\Theta(\psi)\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$, also $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\subseteq N_\mathfrak{p}(E)$.

Das folgende Lemma enthält die Fälle (ai) mit $r=0$ aus Satz 3 und (aiiα) aus Satz 4.

LEMMA 4. *Sei* $E_\mathfrak{P}/F_\mathfrak{p}$ *unverzweigt*, $L_\mathfrak{p}=H\perp\mathfrak{o}_\mathfrak{p}z_3$ *mit* $H\cong A(0,0)$, $Q(z_3)=2b\pi^{2r}$ $(b\in\mathfrak{u}_\mathfrak{p}, r\geqslant 0)$. *Dann ist* $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))=\mathfrak{u}_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}^\times)^2=N_\mathfrak{p}(E)$ *und es gilt*:

(i) *Ist* $r=0$ *und* $F_\mathfrak{p}$ *2-adisch, so ist* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$.

(ii) *Ist* $r>0$ *oder* $F_\mathfrak{p}$ *nichtdyadisch, so gilt* $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$ *genau dann, wenn* $a\in 2\mathfrak{p}$ *gilt*.

Beweis. Nach [1, Th. 3.14] bzw. [7, Satz 3] ist $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p}))=\mathfrak{u}_\mathfrak{p}(F_\mathfrak{p}^\times)^2=N_\mathfrak{p}(E)$. Sei zunächst $a\in 2\mathfrak{p}$, $z_1,z_2\in H$ mit $Q(z_1)=Q(z_2)=0$, $B(z_1,z_2)=1$, sei $H':=\mathfrak{o}_\mathfrak{p}(\pi z_1)\perp\mathfrak{o}_\mathfrak{p}z_2\subseteq H$. H' ist isomorph zu dem aus H durch Dehnung (scaling) um den Faktor π entstehenden Gitter, und mit $L'_\mathfrak{p}:=H'\perp\mathfrak{o}_\mathfrak{p}z_3$ ist $\Theta(O^+(L'_\mathfrak{p}))=F_\mathfrak{p}^\times$, wie man nach [1, 7] nachrechnet. Da $a\in Q(H'))\subseteq Q(L'_\mathfrak{p})$ gilt, folgt nach Lemma 1 in diesem Fall $\Theta(L_\mathfrak{p},a)\neq N_\mathfrak{p}(E)$. Ist $\mathfrak{p}$ nichtdyadisch und $a\in\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$, so setze man $L'_\mathfrak{p}=L_\mathfrak{p}$. Da man jeden Vektor der Länge a in $L_\mathfrak{p}$ orthogonal abspalten kann [12, 82:15], erfüllt $L'_\mathfrak{p}$ nach [12, 92:3] die Voraussetzungen von Lemma 2, es gilt also $\Theta(L_\mathfrak{p},a)=N_\mathfrak{p}(E)$. Sei schließlich $\mathfrak{p}$ 2-adisch, $a\in 2\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ und zunächst $r=0$, H' und $L'_\mathfrak{p}$ wie im ersten Fall. Dann gilt $Q(L'_\mathfrak{p})=2\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$. Denn ist etwa $b=1$, so gilt $Q(L'_\mathfrak{p})=2(1+\mathfrak{p})(\mathfrak{u}_\mathfrak{p})^2$, und da $\mathfrak{u}_\mathfrak{p}/(1+\mathfrak{p})$ ungerade Ordnung hat, ist in dieser Gruppe jedes Element ein Quadrat, also $\mathfrak{u}_\mathfrak{p} = (1+\mathfrak{p})(\mathfrak{u}_\mathfrak{p})^2$. Nach Lemma 1 folgt wegen $a \in Q(L'_\mathfrak{p})$, daß $\Theta(L_\mathfrak{p}, a) \neq N_\mathfrak{p}(E)$ gilt. Ist dagegen $r > 0$, $x = x' + cz_3$ ($x' \in H$, $c \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$) mit $Q(x) = a$, so ist wegen $a \in 2\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ auch $Q(x') \in 2\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$, also ist x' maximal in H, nach [12, 82:17] folgt $B(x', H) = B(x, L_\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Ist $y \in L_\mathfrak{p}$ ein weiterer Vektor mit $Q(y) = a$, so folgt daher nach [9, Satz 1], daß es $\varphi \in O(L_\mathfrak{p})$ gibt mit $\varphi(x) = y$ (denn für y gilt genau wie für x $B(y, L_\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$). Ist $z \in L_\mathfrak{p}$ mit $B(y, z) = 1$, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} y + \mathfrak{o}_\mathfrak{p} z$ unimodular und kann daher in $L_\mathfrak{p}$ orthogonal abgespaltet werden [12, 82:17]. z' sei ein Vektor im orthogonalen Komplement, τ die Symmetrie bezüglich z'. Indem man nötigenfalls φ durch $\tau\varphi$ ersetzt, erreicht man also $\varphi \in O^+(L_\mathfrak{p})$, und aus Lemma 2 folgt $\Theta(L_\mathfrak{p}, a) = N_\mathfrak{p}(E)$.

In den übrigen Fällen der Sätze 3 und 4 gibt man geeignete Untergitter $L'_\mathfrak{p}$ an, die einem die Anwendung eines der Lemmas 1 bis 3 erlauben. Dabei wird Lemma 3 zur Rückführung auf Lemma 4 (oder andere zuvor behandelte Fälle) verwendet, während die beiden anderen auf ähnliche Weise wie beim Beweis von Lemma 4 direkt das jeweilige Ergebnis liefern.

Bemerkung 2. Mit Hilfe von Satz 3 und Satz 4 kann man nach Satz 2 alle Spinorausnahmen des Geschlechts von L berechnen, falls 2 in $F/\mathbb{Q}$ unverzweigt ist, falls also F ungerade Absolutdiskriminante hat, insbesondere enthalten für $F = \mathbb{Q}$ die vorstehenden Ergebnisse das Theorem 2 aus [6]. Da nach Bemerkung 1 nur endlich viele Quadratklassen Spinorausnahmen enthalten und nur für endlich viele $\mathfrak{p} \in S$ $L_\mathfrak{p}$ nicht unimodular ist, läßt sich die Bestimmung der Spinorausnahmen in endlich vielen Schritten durchführen. Ferner zeigen die obigen Ergebnisse, daß für $a \in Q(L)$ aus einer der durch Satz 1 bestimmten Quadratklassen die Antwort auf die Frage, ob a eine Spinorausnahme von gen L ist, nur von den $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(a)$ ($\mathfrak{p} \in S$) abhängt. Dabei kann eine Spinorausnahme a von gen L von den $\mathfrak{p} \in S$ mit $-a\,\mathrm{disc}(V_\mathfrak{p}) = (F_\mathfrak{p}^\times)^2$ in beliebig hoher Potenz geteilt werden, während sie von den anderen $\mathfrak{p} \in S$ nur in beschränkter Potenz geteilt werden kann.

4. Primitive Darstellung

Für primitive Darstellung (d.h., Darstellung durch einen maximalen Vektor des Gitters) erhält man ähnliche Ergebnisse wie in den vorigen Abschnitten. Analog zu §2 definiert man Gruppen $\Theta^*(L_\mathfrak{p}, \mathrm{a})$, indem man die Forderung "$x \in L_\mathfrak{p}$ (bzw. $x \in \varphi(L_\mathfrak{p})$)" durch "$x$ maximal in $L_\mathfrak{p}$ (bzw. $\varphi(L_\mathfrak{p})$)" ersetzt. Satz 2 gilt dann sinngemäß umformuliert. Zur Berechnung von $\Theta^*(L_\mathfrak{p}, a)$ geben wir nur an:

Satz 5. *Sei $\mathfrak{p}$ nichtdyadisch, $L_\mathfrak{p}$ unimodular, a werde von $L_\mathfrak{p}$ primitiv dargestellt, und mit d, E wie in §2 gelte $\Theta(O^+(L_\mathfrak{p})) \subseteq N_\mathfrak{p}(E)$. Dann ist $\Theta^*(L_\mathfrak{p}, a) = N_\mathfrak{p}(E)$.*

Beweis. Sind $x, y \in L_\mathfrak{p}$ maximale Vektoren mit $Q(x) = Q(y) = a$, so ist $B(x, L_\mathfrak{p}) = B(y, L_\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ [12, 82:17], nach [9, Satz 1] gibt es also $\varphi \in O(L_\mathfrak{p})$ mit $\varphi(x) = y$, und φ kann o.E. in $O^+(L_\mathfrak{p})$ angenommen werden. Da auch Lemma 2 sinngemäß umformuliert gültig bleibt, folgt die Behauptung.

Es gibt also seehr viel mehr Spinorprimitivausnahmen als Spinorausnahmen. Ist $L_\mathfrak{p}$ nicht unimodular, so läßt sich $\Theta^*(L_\mathfrak{p}, a)$ vermutlich mit ähnlichen Methoden wie $\Theta(L_\mathfrak{p}, a)$ berechnen.

5. Beispiele

Zum Abschluß sollen die bisher erzielten Ergebnisse dazu benutzt werden, das Darstellungsverhalten einiger positiv definiter Formen aus [5, Table 2, p. 191] (siehe Tabelle I) zu untersuchen. Wir schließen uns der dortigen Notation an, indem wir mit $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{12})$ ein Gitter mit der Matrix (a_{ij}) bezeichnen und, falls $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ gilt, abkürzend (a_{11}, a_{22}, a_{33}) schreiben.

TABELLE I

Nr.	L	K
1	(1, 1, 16)	(2, 2, 5, 1, 1, 0)
2	(1, 4, 16)	(4, 4, 5, 0, 2, 0)
3	(1, 3, 36)	(3, 4, 9)
4	(1, 16, 16)	(4, 9, 9, 1, 2, 2)
5	(1, 12, 36)	(4, 9, 12)
6	(1, 8, 64)	(4, 8, 17, 0, 2, 0)
7	(1, 48, 144)	$(9, 16, 48) = K^{(1)}$
		$(4, 48, 49, 24, 2, 0) = K^{(2)}$
		$(16, 25, 25, 7, 8, 8) = K^{(3)}$

Die Gitter aus der zweiten Spalte der Tabelle (im folgenden stets mit L bezeichnet) werden von Jones und Pall regulär genannt, d.h., sie stellen alle Zahlen dar, die von allen $L_\mathfrak{p}$ dargestellt werden. Daneben sind in der dritten Spalte jeweils Repräsentanten aller anderen Klassen im Geschlecht angegeben (im folgenden stets mit K bezeichnet). Über ihr Darstellungsverhalten machen Jones und Pall die folgenden Aussagen: In den Beispielen 1, 2, 4 und 6 stellt K kein m^2 ($m \in \mathbb{Z}$) dar, dessen sämtliche Primteiler kongruent zu 1 modulo 4 sind, in den Beispielen 3 und 5 kein m^2, dessen sämtliche Primteiler kongruent zu 1 modulo 3 sind, in Beispiel 7 stellt $K^{(1)}$ kein m^2 oder $4m^2$ dar, für das alle Primteiler von m kongruent zu 1 modulo 3 sind. Abgesehen von diesen Ausnahmen stellt jedes K alle Zahlen dar, die von allen Komplettierungen dargestellt werden.

Wir haben hier diejenigen Geschlechter aus [5, Table 2] ausgewählt, bei denen eine Klasse unendlich viele Zahlen nicht darstellt, die vom Geschlecht dargestellt werden. Nach dem in der Einleitung erwähnten (konditionellen) Resultat von Peters [13] müssen diese Zahlen (bis auf höchstens endlich viele) Spinorausnahmen des Geschlechts sein. Wir werden zeigen, daß sie tatsächlich sämtlich Spinorausnahmen des Geschlechts sind und dabei die Aussagen aus [5] über das Dastellungsverhalten mit den Ergebnissen der vorigen Abschnitte neu beweisen bzw. in Beispiel 6 korrigieren. Um unsere Ergebnisse anwenden zu können, berechnen wir zunächst die Spinornormen der lokalen Einheitengruppen der Gitter. Für $p \neq 2, 3$ ist nach [7, Satz 3] $\Theta(O^+(L_p)) = \mathbb{Z}_p^\times (\mathbb{Q}_p^\times)^2$ in allen Fällen, da alle L_p unimodular sind. Für $p = 2$ und $p = 3$ geben wir die Ergebnisse in Tabelle II (berechnet nach [1, 7], $N_p(E)$ hat dieselbe Bedeutung wie in §2).

TABELLE II

Nr.	$\Theta(O^+(L_2))$	$\Theta(O^+(L_3))$
1	$N_2(\mathbb{Q}((-1)^{1/2}))$	$\mathbb{Z}_3^\times (\mathbb{Q}_3^\times)^2$
2	$N_2(\mathbb{Q}((-1)^{1/2})) \cap \mathbb{Z}_2^\times (\mathbb{Q}_2^\times)^2$	$\mathbb{Z}_3^\times (\mathbb{Q}_3^\times)^2$
3	$\mathbb{Z}_2^\times (\mathbb{Q}_2^\times)^2$	$N_3(\mathbb{Q}((-3)^{1/2}))$
4	$N_2(\mathbb{Q}(-1)^{1/2}))$	$\mathbb{Z}_3^\times (\mathbb{Q}_3^\times)^2$
5	$\mathbb{Z}_2^\times (\mathbb{Q}_2^\times)^2$	$N_3(\mathbb{Q}((-3)^{1/2}))$
6	$N_2(\mathbb{Q}((-2)^{1/2}))$	$\mathbb{Z}_3^\times (\mathbb{Q}_3^\times)^2$
7	$\mathbb{Z}_2^\times (\mathbb{Q}_2^\times)^2$	$N_3(\mathbb{Q}((-3)^{1/2}))$

Berechnet man mit Hilfe dieser Daten die Anzahl $g(L)$ der Spinorgeschlechter im Geschlecht von L nach [7, Satz 2] (siehe auch [12, §102 B]), so erhält man, daß in allen Beispielen $g(L) = 2$ gilt (in [14] ist dies durchgeführt und außerdem gezeigt, daß in allen anderen Fällen aus [5, Table 2] $g(L) = 1$ gilt). Die Zahlen aus $Q(\text{gen } L)$, die von K nicht dargestellt werden, sind daher in den Beispielen 1–6 wie behauptet Spinorausnahmen des Geschlechts (für Beispiel 7 siehe Korollar 2).

LEMMA 5. *In den Beispielen aus Tabelle I ist a genau dann eine Spinorausnahme von gen L, wenn gilt: $a = m^2$ $(m \in \mathbb{Z})$, wo m zusätzlich erfüllt:*

$p \mid m \Rightarrow p \equiv 1$ *mod* 4 *in den Fällen* 1, 2 *und* 4

$p \mid m \Rightarrow p \equiv 1$ *mod* 3 *in den Fällen* 3 *und* 5

$p \mid m \Rightarrow p \equiv 1$ *mod* 8 *oder* $p \equiv 3$ *mod* 8 *in Fall* 6

$p \mid m \Rightarrow p \equiv 1$ *mod* 3 *oder* $p = 2$ *und* $4 \nmid m$ *in Fall* 7.

Beweis. Unter Ausnutzung von Tabelle II ist dies eine leichte Anwendung der Sätze 2, 3 und 4.

KOROLLAR 1. *In den Beispielen* 1–6 *stellt L alle Zahlen dar, die von allen L_p dargestellt werden, während K diese Zahlen außer den in Lemma* 5 *aufgeführten Spinorausnahmen darstellt.*

Beweis. In allen Fällen stellt L die Zahl 1 dar, also alle Quadrate und damit alle Spinorausnahmen, woraus die Behauptung sofort folgt, da in diesen Beispielen Spinorgeschlecht und Klasse zusammenfallen.

Bemerkung 3. In Beispiel 6 weicht unser Resultat also von dem aus [5] ab, stimmt dagegen mit dem von Lomadze [11] überein. Da K in diesem Beispiel offensichtlich 25 darstellt, sieht man auch, daß die Behauptung aus [5] falsch ist.

KOROLLAR 2. *In Beispiel* 7 *stellen $K^{(1)}$ und $K^{(3)}$ keine der Spinorausnahmen dar.*

Beweis. Die Behauptung erhält man, indem man nachweist, daß $K^{(1)}$ und $K^{(3)}$ das eine, L und $K^{(2)}$ das andere der beiden Spinorgeschlechter in gen L bilden und berücksichtigt, daß L alle Quadrate, also alle Spinorausnahmen darstellt.

Bemerkung 4. Unser Ergebnis ist hier also für $K^{(1)}$ und für L etwas schwächer als das aus [5], während wir für $K^{(3)}$ eine neue Aussage erhalten.

LITERATUR

1. A. G. EARNEST UND J. S. HSIA, Spinor norms of local integral rotations, II, *Pacific J. Math.* **61** (1975), 71–86.
2. A. G. EARNEST UND J. S. HSIA, Spinor genera under field extensions, II, *Amer. J. Math.* **100** (1978), 523–538.
3. J. S. HSIA, Representations by spinor genera, *Pacific J. Math.* **63** (1976), 147–152.
4. J. S. HSIA, Y. KITAOKA UND M. KNESER, Representations of positive definite quadratic forms, *J. Reine Angew. Math.* **301** (1978), 132–141.
5. B. W. JONES UND G. PALL, Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms, *Acta Math.* **70** (1940), 165–191.
6. B. W. JONES UND G. L. WATSON, On indifinite ternary quadratic forms, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 592–608.
7. M. KNESER, Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen, *Arch. Math. (Basel)* **7** (1956), 323–332.
8. M. KNESER, Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen, *Math. Z.* **77** (1961), 188–194.
9. M. KNESER, Witts Satz für quadratische Formen über lokalen Ringen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1972**, 195–203.

10. M. KNESER, "Quadratische Formen," Vorlesungsausarbeitung, Göttingen, 1974.
11. G. A. LOMADZE, Formeln für die Anzahl der Darstellungen ganzer Zahlen durch einige reguläre und semireguläre ternäre quadratische Formen, die zu zweiklassigen Geschlechtern gehören (russ.), *Acta Arith.* **34** (1978), 131–162.
12. O. T. O'MEARA, "Introduction to Quadratic Forms," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
13. M. PETERS, Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen, *Acta Arith.* **34** (1977), 57–80.
14. R. SCHULZE-PILLOT, "Darstellung von Zahlen durch Spinorgeschlechter ternärer quadratischer Gitter," Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1977.
15. V. TARTAKOVSKIJ, Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, \ldots, x_s)$ $(s = 4)$ darstellbar sind, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* **7** (1929), 111–122, 165–196.

JOURNAL OF NUMBER THEORY **12**, 541–542 (1980)

An Elementary Proof of the Petersson–Knopp Theorem on Dedekind Sums

LARRY A. GOLDBERG

Department of Mathematics, University of Illinois
Urbana, Illinois 61801

Communicated by H. Zassenhaus

Received September 11, 1979

A brief and elementary proof of Petersson and Knopp's recent theorem on Dedekind sums is given. The proof is based on a result of Subrahmanyam.

Using Hecke operators, Knopp [1] has proven the following result concerning the classical Dedekind sum $s(h, k)$.

THEOREM. *For any positive integer* n,

$$\sum_{\substack{ad=n\\ d>0}} \sum_{b \pmod d} s(ah+bk, dk) = \sigma(n)\, s(h, k),$$

where $\sigma(n)$ *is the sum of the positive divisors of* n.

This result was first mentioned in correspondence from H. Petersson to E. Grosswald, but with the restrictions $k \equiv 0 \pmod n$, $h \equiv 1 \pmod n$ and $(h, k) = 1$. The object of this paper is to provide a brief and elementary proof of the above Theorem, based on a result by Subrahmanyam [3]. Parson [2] has also given an elementary proof, but her proof is completely different.

Proof. In [3], Subrahmanyam shows by elementary means that for any positive integer d,

$$\sum_{b \pmod d} s(h+bk, dk) = \sum_{c \mid d} \mu(c)\, s(hc, k)\, \sigma(d/c).$$

Replacing h by ah and summing over all $d > 0$ such that $ad = n$, we get

$$\sum_{\substack{ad=n\\ d>0}} \sum_{b \pmod d} s(ah+bk, dk) = \sum_{\substack{ad=n\\ d>0}} \sum_{c \mid d} \mu(c)\, s(ahc, k)\, \sigma(d/c). \tag{1}$$

0022-314X/80/040541-02$02.00/0