II A 11. FUNKTIONALOPERATIONEN UND -GLEICHUNGEN*)

VON

S. PINCHERLE

IN BOLOGNA.

Inhaltsverzeichnis.

Funktionaloperationen.

Funktionalgleichungen.

*) Die in diesem Artikel auftretenden Variabeln können ebensowohl komplex als reell sein; er hätte daher auch in II B Platz finden können. Wir reihen ihn an dieser Stelle ein, um sein Erscheinen nicht noch länger hinausschieben zu müssen. Red.

Litteratur.

Lehrbücher.

L. J. A. Arbogast, Du calcul des dérivations, Strassb. 1800.
R. Carmichael, Treatise on the calculus of operations, Lond. 1855; deutsch von *C. H. Schnuse,* Braunschw. 1857.
H. Schapira, Theorie allgemeiner Kofunktionen, Leipz. 1892 (unvollendet).
G. Oltramare, Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896.
S. Pincherle e *U. Amaldi,* Le operazioni funzionali distributive, Bologna 1901.

Monographien.

G. Leibniz, Symbolismus memorabilis, Miscell. Berol. 1710, p. 160.
J. L. Lagrange, Mém. sur une nouvelle espèce de calcul, Berl. nouv. mém. 3, 1772 (74), p. 185; Oeuvres 3, p. 441.
A. M. de Lorgna, Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal, Turin mém. 4 (1787), p. 409.
J. Ph. Gruson, Le calcul d'exposition, Berl. nouv. mém. 1798/99.
J. J. Français, Mém. tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles, Gerg. Ann. 3 (1812), p. 244.
M. Servois, Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, ibid. 5 (1814), p. 93.
Ch. Babbage, On functional equations (Appendix von *W. Herschel*'s Collection of examples on the calculus of finite differences, Cambr. 1820; in der deutschen Übersetzung von *Schnuse* weggelassen).
A. Cauchy, Sur l'analogie des puissances et des differences. Exercices de Mathém. 2, Paris (1827), p. 159 (Oeuvres (2) 7, p. 198).
J. Liouville, Sur les dérivées à indices quelconques, J. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 71.
R. Murphy, On the theory of analytical operations, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.
G. Boole, On a general method in analysis, ibid. 1844, p. 225.
W. H. Russell, On the calculus of symbols, ibid. 1861, p. 69; 1862, p. 223, 265; 1863, p. 517.
W. Spottiswoode, On the calculus of symbols, ibid. 1862, p. 99.

Hj. Holmgren, Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst, Stockh. Handl. 5^{11}, 1864/65.
E. Schroeder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2 (1870), p. 317.
— Über iterierte Funktionen, ibid. 3 (1871), p. 296.
P. Gazzaniga, Il calcolo dei simboli d'operazioni elementarmente esposto, Giorn. di mat. 20 (1880), p. 72.
G. Koenigs, Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles, Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl., p. 3.
— Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles, ibid. 2 (1885), p. 385.
A. Grévy, Étude sur les équations fonctionnelles, ibid. (3) 11 (1894), p. 249; auch Thèse Paris.
S. Pincherle, Mém. sur le calcul fonctionnel distributif, Math. Ann. 49 (1897), p. 325.
C. Bourlet, Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 133.
— Sur certaines équations analogues aux différentielles, ibid. 16 (1899), p. 333.
L. Leau, Étude sur les équations fonctionnelles, Toulouse fac. ann. 11, 1897 p. E. 1; auch Thèse Paris 1897.
V. Volterra, Sull' inversione degli integrali definiti, Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429.
— Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti, Ann. di mat. (2) 25 (1897). p. 139.

Die bereits in I E erwähnten zahlreichen Lehrbücher und Monographien über *Differenzenrechnung*, in denen oft ganze Kapitel dem Rechnen mit Symbolen oder einzelnen seiner Anwendungen gewidmet sind, sind hier nicht noch einmal aufgezählt.

Die Litteratur ist im allgemeinen in diesem Artikel bis Anfang 1902 berücksichtigt; nur in Nr. **31** bis 1905.

Funktionaloperationen.

1. Definition der Funktionalrechnung. In der allgemeinen Theorie der Operationen hat man drei Arten von Elementen zu unterscheiden[1]): die *Objekte*, an denen man operiert; die *Operationen*, die man an diesen Objekten ausführt — man stellt sie durch Zeichen dar, die man *Operationssymbole* oder einfach *Symbole* nennt[2]) —; endlich die *Resultate*, die man durch Ausführungen der Operationen erhält. Sind die Objekte und die Resultate *Funktionen* von einer

1) *R. Murphy*, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.

2) Seit *Leibniz* und *Lagrange; A. M. Lorgna* (Turin mém. 1787, p. 409) und *Lacroix* (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1819, p. 28, 39, 546, 844, 963) sagen *„caractéristiques"; Arbogast* (Calcul des dérivations, Strassb. 1800) und *Français* (Gergonne Ann. 3 (1812), p. 244) *„échelles"*. Vgl. auch *Lacroix*, p. 970.

oder mehreren Veränderlichen, so heissen die Operationen *Funktionaloperationen;* der so entstehende Zweig der Analysis wird gewöhnlich als *Rechnen mit Symbolen* bezeichnet[3]), würde aber besser *Funktionalrechnung* heissen.

2. Die Funktionalrechnung von Leibniz bis Lagrange. Auf die frappierende Analogie zwischen der Regel zur Bildung der höheren Differentialquotienten eines Produkts zweier oder mehrerer Funktionen und der Regel zur Bildung der entsprechenden Potenzen eines Binoms oder Polynoms hat zuerst *Leibniz* in seinem Briefwechsel mit *Johann I. Bernoulli*[4]), dann in der Abhandlung „Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum“[5]) aufmerksam gemacht. Auf diese Bemerkung von *Leibniz* gründete *Lagrange*[6]) einen Algorithmus, in welchem das Differentialzeichen systematisch wie eine fiktive Grösse behandelt wird, auf die man die Regeln der gewöhnlichen Algebra anwendet, mit dem Vorbehalt, dass man dann in den Resultaten die n^{te} Potenz von du/dx durch $d^n u/dx^n$ ersetzt. Er erhält auch zum erstenmal die später in vielen Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung reproduzierte symbolische Formel:

$$\Delta^\lambda u = \left(e^{h\frac{du}{dx}} - 1\right)^\lambda, \tag{1}$$

in der Δu die Differenz $u(x+h) - u(x)$ bedeutet. Nach *Lagrange* ist dieser Algorithmus von vielen anderen Autoren wieder vorgenommen und weiter entwickelt worden, namentlich in der Absicht, eine Menge zu (1) mehr oder weniger analoger Formeln zu erhalten. Im folgenden sind die interessantesten davon besprochen, viele andere, ihres fast rein formellen Charakters wegen, beiseite gelassen[7]).

3. Untersuchungen über das Rechnen mit Symbolen bis auf Servois. Kaum waren die Analogien zwischen dem Rechnen mit Potenzexponenten und dem mit Differentiationsindices bemerkt, so beschäftigte man sich mit der Frage nach einem fundamentalen Prinzip, durch das man das Rechnen mit Symbolen rechtfertigen könne. Wenn man z. B. auf die Differentialien die Regeln des Rech-

3) *Leibniz,* Berol. Miscell. 1 (1710), p. 160.

4) Commercium philos. et math., Lausannae et Genevae 1745, epist. VI ad XVIII, passim. *Leibniz'* math. Schriften (1) 3, p. 175.

5) Berol. Miscell. 1 (1710), p. 160.

6) Berl. nouv. mém. 1772, p 185; Oeuvres 3, p. 441.

7) Unter den Anwendungen aus neuester Zeit sei erwähnt: *J. Fredholm,* Sur la méthode de prolongement analytique de Mittag-Leffler, Stockh. Förhandl. 1901, p. 203.

nens mit Potenzen anwendet: wodurch ist man berechtigt, die Resultate als zuverlässig hinzustellen? Schon *Johann I. Bernoulli* erkannte in einem Briefe an *Leibniz*[8]) an, dass die Analogie nicht zufällig sein könne: „haud dubie aliquid arcani subest". *Lagrange*[6]) glaubte, das Prinzip müsse ziemlich versteckt liegen: „quoique le principe de cette analogie entre les puissances positives et les différentielles, et les négatives et les intégrales, ne soit pas évident par lui-même, cependant les conclusions qu'on en tire ne sont pas moins exactes, ainsi qu'on peut s'en convaincre à posteriori". *P. S. Laplace*[9]) geht zum Beweis von (1) und anderen analogen Formeln davon aus, dass in der Entwicklung:

$$\Delta^\lambda u = \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda} h^\lambda + A' \frac{d^{\lambda+1} u}{dx^{\lambda+1}} h^{\lambda+1} + A'' \frac{d^{\lambda+2} u}{dx^{\lambda+2}} h^{\lambda+2} + \cdots \tag{2}$$

die Koeffizienten $A', A'', \ldots$ nur von λ und nicht von der Funktion u abhängen; man kann sie also durch Spezialisierung dieser Funktion bestimmen. Setzt man speziell $u = e^x$, so erhält man wieder das Rechnen mit Potenzen; damit ist die von *Leibniz* bemerkte Analogie erklärt.

Andere Autoren, wie *A. M. Lorgna*[10]), *J. Ph. Gruson*[11]), *L. J. Arbogast*[12]), *J. F. Français*[13]) benutzen zur Rechtfertigung des Rechnens mit Symbolen Argumentationen, die unter verschiedenen Formen alle den Fehler aufweisen, dass die Symbole d, Δ, S, Σ bald wie Operationszeichen, bald wie wirkliche *„algebraische Grössen"*[14]) behandelt werden. Die beiden zuletzt Genannten bezeichnen ihre Methoden als *„séparation"* oder *„détachement des échelles"*. Sie wollen „fonder le calcul différentiel sans autre métaphysique que celle de l'algèbre"[15]), d. h. auf eine rein algorithmische oder formelle Basis; damit verlangen sie freilich vom Operationskalkül mehr als er leisten kann. Ausserdem haben alle ihre Methoden etwas künstliches und daher unbefriedigendes an sich.

---

8) Commerc. philos. et mathem. epist. XVIII. Vgl. auch eine ganz ähnliche Äusserung von *Leibniz* selbst, math. Schriften (1) 3, p. 175.

9) Paris mém. div. sav. [étr.] 7 (1776); Oeuvres 8.

10) Turin mém. 1786/87, p. 409; vgl. *Brinkley,* Lond. Phil. Trans. 1807, p. 114.

11) Berl. nouv. mém. 1798/99.

12) Calcul des dérivations, Strassb. 1800; vgl. *A. Cayley,* Lond. Phil. Trans. 1861, p. 37 (Papers 4, p. 265).

13) Gergonne Ann. 3 (1812), p. 244.

14) Unter „quantités algébriques" verstand man damals Buchstaben, die den Regeln des gewöhnlichen Rechnens folgen; diese Ausdrucksweise hat sich fast bis auf unsere Tage erhalten.

15) *Gruson,* Berlin nouv. mém. (1798).

4. Prinzip des Rechnens mit Symbolen. Ein wirklicher Fortschritt findet sich bei *Servois*[16]), der zuerst eingesehen hat: das fundamentale Prinzip des Rechnens mit Symbolen besteht in der *Erhaltung* gewisser Eigenschaften — *formaler Gesetze,* wie man jetzt sagt — der Operationen, auf die man dieses Rechnen anwendet. Er zeigt in der That, dass der Grund der von seinen Vorgängern konstatierten Analogien in den *kommutativen, distributiven* und *assoziativen* Eigenschaften der Operationssymbole Δ, d/dx, Σ, S liegt; man verdankt ihm auch die beiden ersten dieser Termini. Wie seine Vorgänger verwechselt er die Worte „Funktion" und „Operation", nicht ohne damit der Klarheit Eintrag zu thun. Wieder aufgenommen, systematischer geordnet und weiter entwickelt wurden seine Ideen von *R. Murphy*[17]), *G. Boole*[18]) und vielen anderen, namentlich englischen Mathematikern[19]); ihnen verdankt man die in den folgenden Nummern dargestellten Resultate.

5. Elemente des Operationskalküls. Seien $\alpha, \beta, \ldots$ Funktionen von einer oder mehreren Variabeln, $A, B, \ldots$ Symbole von *Operationen,* deren Anwendung auf die Funktionen α, β, ... als *Objekte* im allgemeinen neue Funktionen als *Resultate* liefert. Man hat zunächst zwischen *ein-* und *mehrdeutigen* Operationen zu unterscheiden, je nachdem das Resultat einzig ist oder nicht. Die folgenden Definitionen beziehen sich zunächst auf die ersteren, lassen sich aber unter geeigneten Einschränkungen auch auf die letzteren anwenden. Die *Gleichheit* $A = B$ ist definiert durch die Bedingung, dass die Anwendung von A, B auf dieselben Objekte dieselben Resultate giebt; die *Summe*

16) Gergonne Ann. 5 (1814), p. 93.

17) Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.

18) Ibid. 1844, p. 225. Vgl. auch *Boole*'s Math. Analysis of logic, Cambr. 1847; Treatise on differential equations, London 1865, chap. 16.

19) Es ist ziemlich unmöglich, sie alle aufzuzählen; genannt seien noch: *D. F. Gregory*, Examples on the differential calculus, Cambr. 1841; *Ch. Hargreave,* On the solution of linear differential equations, Lond. Phil. Trans. 1848, p. 31; *B. Bronwin,* Lond. Phil. Trans. 1851, p. 461; *B. Tortolini,* Ann. di scienze mat. e fis., Roma 1853, p. 1; *Graves,* Dubl. Proc. 3 (1847), p. 536; *Carmichael,* Treatise on the calculus of operations, Lond. 1855; *Jellett*, Calculus of variations, Dublin 1850; *W. Spottiswoode,* Cambr. and Dubl. math. J. 8 (1853), p. 25; Lond. Phil. Trans. 1862, p. 99; *W. H. Russell,* Lond. Phil. Trans. 1861, p. 69; 1862, p. 253, 265; 1863, p. 517; *A. Cayley,* ibid. 1861, p. 37. Vgl. auch *F. Casorati,* Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 10; Linc. mem. (3) 5 (1880), p. 195; *P. Gazzaniga,* Giorn. di mat. 20 (1882), p. 72. — Die verschiedenen genannten Autoren gebrauchen sehr verschiedene Nomenklaturen und Bezeichnungen; in diesem Artikel ist eine gleichmässige Bezeichnung benutzt, die am einfachsten und rationellsten zu sein schien, übrigens von der von *Boole, Carmichael* und *Casorati* benutzten nicht wesentlich abweicht.

$A + B$ als diejenige Operation, deren Anwendung auf ein Objekt α als Resultat die Summe der Resultate der Anwendung von A und von B auf dasselbe Objekt ergiebt. Die so definierten Begriffe der Gleichheit und der Summe von Operationen haben dieselben wohlbekannten formalen Eigenschaften wie die Gleichheit und die Summe von Grössen. Man nennt ferner *Produkt* von B mit A und bezeichnet mit AB [20]) das Resultat, das man erhält, wenn man die Operation A auf das Resultat von B anwendet. Das Produkt BA ist im allgemeinen von AB verschieden; sind diese Produkte einander gleich, so ist die Multiplikation der Symbole A und B *kommutativ.* Die Operationen, die man gewöhnlich untersucht, geben $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$; das ist die *assoziative* Eigenschaft. Von Symbolen derart, dass die Gleichungen gelten:

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) \tag{3}$$

und wenn c irgend eine Zahl ist [21]):

$$A(c\alpha) = cA(\alpha), \tag{4}$$

sagt man, sie haben die *distributive* Eigenschaft [22]); die Symbole und die durch sie bezeichneten Operationen heissen dann auch selbst distributiv.

Aus dem assoziativen Gesetz folgt das *Gesetz der Indices* (law of indices):

$$A^m A^n = A^{m+n}. \tag{5}$$

Dieses Gesetz lässt sich auf negative und gebrochene Exponenten ausdehnen. Man bezeichnet mit dem Symbol 1 die „*identische*" Operation:

$$1(\alpha) = \alpha \tag{6}$$

und mit A^{-1} eine zu A „*inverse*" Operation, d. h. eine von der Art, dass $AA^{-1}(\alpha) = \alpha$ ist für jedes Objekt α, oder symbolisch:

$$AA^{-1} = 1. \tag{7}$$

Hier und im folgenden bis Nr. **17** einschließlich soll *nur von distributiven* Operationen die Rede sein; sie haben sich zuerst dargeboten und sind für die Anwendungen die wichtigsten. Für eine solche Operation ist die inverse A^{-1} bestimmt bis auf einen additiven Term

20) Mehrere Autoren, z. B. *C. Jordan,* Traité des substitutions, Paris 1870, bezeichnen dieses Produkt mit BA. Die Bezeichnung $AB \cdot \alpha$ für $A(B(\alpha))$ schliesst sich an die der Theorie der Funktionen an.

21) Nur wenn c rational ist, ist (4) Folge von (3).

22) *Servois,* Gergonne Ann. 5 (1814), p. 248.

$A^{-1}(0)$; und wenn die Gleichung $A(\omega) = 0$ mehrere Lösungen ω_1, $\omega_2, \ldots$ hat, so unterscheiden sich zwei verschiedene Werte von A^{-1} voneinander durch ein willkürliches Element der linearen Mannigfaltigkeit $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots$. Unter den verschiedenen Werten von A^{-1} sind dann auch solche, die ebenfalls distributiv sind. Man kann Funktionen von einem oder mehreren distributiven Symbolen definieren, indem man mit rationalen ganzen Funktionen beginnt. Wenn die kommutative Eigenschaft besteht, sind die Regeln des Rechnens mit diesen Funktionen dieselben wie die der gewöhnlichen Algebra. Man geht dann zu gebrochenen Funktionen von einem oder mehreren Symbolen über, und man beweist[23]), dass diese ebenfalls distributive Operationen liefern. Das Symbol B heisst *intermediär*[24]) zwischen A und Γ, wenn $AB = B\Gamma$ ist; in modernerer, der Gruppentheorie (I A 6, Nr. **3**) entlehnter Sprechweise sagt man, dass Γ die *Transformierte* von A vermittelst B ist. Es ist dann B auch intermediär zwischen $f(A)$ und $f(\Gamma)$, wenn f das Zeichen einer rationalen Funktion ist. Man hat auch transzendente Funktionen von Symbolen und Entwicklungen in Reihen mit symbolischen Gliedern[25]) betrachtet; z. B.

$$e^A = \sum \frac{1}{n!} A^n. \tag{8}$$

Sind die Symbole A, B kommutativ[26]), so hat diese Operation die Eigenschaft:

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{9}$$

Die *Division* nicht kommutativer Symbole giebt Anlass zu zwei verschiedenen Fällen, je nachdem man von den beiden Faktoren eines Produkts den zur Rechten (inneren Divisor) oder den zur Linken (äusseren Divisor) sucht; für beide Fälle hat man die Verallgemeinerung der Formeln der Division der Polynome gegeben[27]).

6. Einfache distributive Operationen. Zu den einfachsten distributiven Symbolen gehören:

D, das Symbol der gewöhnlichen Differentiation;

Δ, Symbol der endlichen Differenz:

$$\Delta\alpha(x) = \alpha(x+1) - \alpha(x); \tag{10}$$

---

23) *Murphy,* Lond. Phil. Trans. 1837, p. 182.

24) Ibid. p. 196.

25) Bei den meisten Autoren ohne jede Frage nach der Konvergenz.

26) *Murphy,* Lond. Phil. Trans. 1837, p. 198.

27) *Russell,* ibid. 1861—1863.

θ, von den älteren Analysten[28]) „état varié" genannt, definiert durch:

$$(11) \qquad \theta\alpha(x) = \alpha(x+1).$$

Zwischen θ und Δ besteht die Relation:

$$(12) \qquad \theta = \Delta + 1.$$

Ferner ist:

$$(13) \qquad \theta^h \alpha(x) = \alpha(x+h)$$

für jedes h.

S_μ, wo μ eine Funktion von x ist, bedeutet die Operation der *Substitution*, die in einer gegebenen Funktion x durch $\mu(x)$ ersetzt; man hat demnach:

$$(14) \qquad S_\mu \alpha(x) = \alpha(\mu(x)).$$

Neben diesen einfachen Operationen hat man die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen ihrer Symbole. Ist $f(D)$ eine rationale Funktion des Symbols D und f' die nach den gewöhnlichen Regeln gebildete Ableitung von f, so hat man[29]):

$$(15) \quad f(D)(\alpha\beta) = \alpha f(D)\beta + D\alpha \cdot f'(D)\beta + \frac{1}{1\cdot 2} D^2\alpha \cdot f''(D)\beta + \cdots.$$

B. Brisson[30]) hat allgemeinere Funktionen $f(D, \Delta)$ der distributiven Symbole betrachtet und zur Integration linearer Differenzen- und Differenzialgleichungen verwendet. *A. Cauchy*[31]) hat diese Untersuchungen fortgeführt; er giebt eine grosse Anzahl Formeln, von denen viele dadurch erhalten werden, dass er an der Stelle der Funktion und ihrer Ableitungen ihre Ausdrücke durch bestimmte Integrale substituiert; so findet er zahlreiche Summenformeln von neuem, u. a. die bekannte von *Euler-Maclaurin* (I E, Nr. **11**). Erwähnenswert ist, dass er zuerst bemerkt, dass das Rechnen mit Symbolen auch zu unrichtigen Resultaten führen kann, wenn man die Funktionen von Symbolen $f(D, \Delta)$ in Reihen entwickelt; er giebt Grenzen für die Konvergenz solcher Reihen und Methoden zur Verifikation der auf symbolischem Wege

28) *Arbogast* u. a.

29) *Hargreave,* Lond. Phil. Trans. 1848. Für den Fall, dass f eine ganze Funktion von D ist, selbst für den Fall, dass sie die Variable noch in den Koeffizienten enthält, war diese Formel schon *J. d'Alembert* bekannt (Théorie des vents, Berl. mém. 1746; vgl. die allgemeine Formel Nr. **13**).

30) *Brisson* scheint seine Untersuchungen nicht selbst publiziert zu haben; sie werden von *Cauchy*[31]) zitiert.

31) Sur l'analogie des puissances et des différences, Exerc. de math. 2, Paris 1827, p. 159 (Oeuvres (2) 7, p. 198). Vgl. auch Par. C. R. 17, 1843, p. 377, 449 (Oeuvres (1) 8, p. 26, 28).

erhaltenen Resultate. Endlich dehnt er seine Überlegungen auch auf Funktionen von Symbolen $F(D_x, D_y, D_z, \ldots, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots)$ aus, die sich auf Funktionen von mehreren Variabeln anwenden lassen.

Einige der Resultate von Nr. **5**, sowie die Formel (15) lassen sich auch auf solche Funktionen ausdehnen, die zu Koeffizienten nicht mehr Konstante haben, sondern Funktionen der Variabeln, die in die Objekte α, β, ... eingehen[32]).

7. Ableitungen (Differentialquotienten) zu beliebigem Index. An das besprochene Rechnen mit Symbolen schliesst sich eng das Rechnen mit Ableitungen zu beliebigem Index an. Die Idee, Ableitungen mit negativ ganzzahligem oder mit gebrochenem Index zu betrachten, geht mit den Anfängen der Differentialrechnung auf *Leibniz* selbst[33]) zurück. Unter den zahlreichen Versuchen, zu denen sie Veranlassung gegeben hat[34]), ist der von *J. Liouville*[35]) zu erwähnen: er geht wesentlich von der Hypothese aus, dass die Funktion $\alpha(x)$ eine Entwicklung in eine Reihe von Exponentialgrössen:

$$\alpha(x) = \sum_n c_n e^{a_n x} \tag{16}$$

zulässt, und definiert dann die Ableitung der beliebigen (rationalen oder irrationalen, reellen oder komplexen) Ordnung s durch die Reihe:

$$D^s \alpha(x) = \sum_n c_n a_n^{\,s} e^{a_n x}. \tag{17}$$

Diese Definition erlaubt die Sätze des Rechnens mit Ableitungen leicht zu verallgemeinern; aber als allgemein kann sie nicht angesehen werden, da sie weder auf die etwaige Unmöglichkeit Rücksicht nimmt, eine vorgelegte Funktion $\alpha(x)$ in der Form (16) zu entwickeln, noch auf eine etwaige Divergenz der entstehenden

32) *Boole,* Treatise on differential equations, chap. 16.

33) Opera ed. *Dutens* 3, p. 105; Commercium philos. et math., passim.

34) Z. B. *L. Euler,* Petrop. Comm. 1730/31; *J. B. Fourier,* Théorie de la chaleur, Paris 1822, Nr. 422, p. 561; *Lacroix,* Traité de calcul différentiel 3 (1821), p. 409; *S. Spitzer,* Arch. Math. Phys. 32, p. 334; 33 (1859), p. 116; *Tardy,* Ann. di mat. 1 (1858); *S. Roberts,* Quart. J. 7, p. 316; 8, p. 52, 139 (1866—67); *C. W. Borchardt,* Berl. Ber. 1868; Bollet. Boncompagni 2, p. 277; *A. Genocchi,* Torino Atti 4 (1869), p. 263; Torino Mem. (2) 26 (1871), p. 61; *G. H. Halphen,* Bull. Soc. Math. 8 (1880), p. 62; *J. Hadamard,* J. de math. (4) 8 (1892), p. 171; *Ch. Bourlet,* Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 154; *Oltramare,* Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896. Ein Verzeichnis von zahlreichen Arbeiten über Ableitungen zu beliebigem Index, von *E. Wölffing,* findet sich im „Intermédiaire des mathématiciens" 6 (1899), p. 258. S. auch Interm. 12 (1905), p. 24; Encykl. II A 2, Nr. **48**, **49**.

35) J. éc. polyt. 13 (1832).

Reihen (17). *J. A. Serret*[36]) hat die *Liouville*'sche Theorie auf die Integration gewisser Differentialgleichungen angewandt. Eine Jugendarbeit von *B. Riemann*[37]) definiert als Ableitung s^{ter} Ordnung einer Funktion $\alpha(x)$ den Koeffizienten von h^s in der Entwicklung von $\alpha(x+h)$ in eine Reihe von Potenzen der Form h^{t+n} (t nicht ganzzahlig; $n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$) — abgesehen von einem von t abhängigen, aber von x und der Funktion α unabhängigen Faktor. Von dieser Definition aus kommt er zu der Darstellung dieser Ableitung durch das bestimmte Integral:

$$(18) \qquad D^s \alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(m-s)} D^m \int^x (x-z)^{m-s-1} \alpha(z)\, dz$$

(m ganzzahlig); *Hj. Holmgrén*[38]) benutzt umgekehrt diese Darstellung als Ausgangspunkt, um in einer weitläufigen Abhandlung die Eigenschaften der Ableitungen zu beliebigem Index zu entwickeln. Unter neueren Anwendungen dieses Algorithmus sind zu erwähnen: der Zusammenhang zwischen der *Ordnung* einer Potenzreihe $\alpha(x) = \sum a_n x^n$, d. h. einer Zahl w von der Art, dass $D^{-s}(x)$ auf ihrem Konvergenzkreis endlich, stetig und „à écart limité" ist für $s > w$, aber nicht für $s < w$, und der Grenze $\lim\limits_{n=\infty} a_n$; andererseits der Zusammenhang zwischen der Ordnung und den Singularitäten von $\alpha(x)$ auf dem Konvergenzkreis[39]). Für eine analytische in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion giebt *Bourlet*[40]) für die Ableitung der beliebigen Ordnung s die Definition:

$$(19) \qquad D^s \alpha(x) = \frac{s}{\Gamma(1-s)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!\,(s-n)} D^n \alpha(x),$$

und *Pincherle*[41]) beweist, dass diese Reihe gerade die Bedingungen erfüllt, denen eine Funktionaloperation genügen muss, wenn sie die charakteristischen Eigenschaften der Ableitungen ganzzahliger Ordnung behalten soll.

8. Die Generalisationsrechnung von Oltramare. Von der Theorie der Ableitungen zu beliebigem Index im Sinne von *Liouville*[35]) stammt direkt die Methode von *G. Oltramare*, der ihr Urheber den Namen

36) Par. C. R. 17 (1843), p. 458.

37) Werke ed. *Dedekind* u. *Weber*, p. 331.

38) Stockh. Handl. 5^2 (1866).

39) *Hadamard*, J. de math. (4) 8 (1892); La série de *Taylor* et son prolongement, Paris coll. scientia 1901, p. 44.

40) Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 154.

41) Bologna mem. (5) 9 (1902).

„Generalisationsrechnung“ gegeben hat[42]). Ist eine Funktion in eine Reihe von Exponentialgrössen entwickelt gegeben:

(20) $$\alpha(x) = \sum f(u)\, e^{ux},$$

so betrachtet er diese Funktion als Resultat einer auf e^{ux} ausgeübten Operation G:

(21) $$G e^{ux} = \sum f(u)\, e^{ux} = \alpha(x).$$

Es folgt dann:

(22) $$G u^n e^{ux} = D^n \alpha(x)$$

und

(23) $$G f(u)\, e^{ux} = f(D)\{\alpha(x)\}$$ [43]);

man kann also durch dieses Hilfsmittel aus jeder Gleichung $f(u) = g(u)$ eine Funktionalrelation erhalten, indem man mit e^{ux} multipliziert und dann beiderseits die Operation G ausübt. *Oltramare* leitet so zahlreiche Formeln ab, doch nicht mit genügender Strenge, da namentlich die Vertauschbarkeit der Operation G mit der Integration zwischen unendlichen Grenzen, von der er Gebrauch macht, nicht bewiesen ist. Nur durch genauere Bestimmung der Klasse von Funktionen, an der man operiert, kann man die meisten Resultate streng machen, ebenso wie die Methode von *Liouville* für die Ableitungen zu beliebigem Index. *L. Desaint*[44]) kündigt sowohl dieses Resultat an, als auch den Satz, dass jede in einem geschlossenen Bereich reguläre analytische Funktion sich immer durch eine abzählbare oder nicht abzählbare Summe von Exponentialgrössen darstellen lässt.

9. Anwendungen des Rechnens mit Symbolen. Sei A eine distributive Operation und sei vorausgesetzt, dass es in einer gewissen Menge von Funktionen für jeden Wert der Konstante a nur eine Funktion $\varepsilon(a)$ gebe, die der Gleichung:

(24) $$A(\varepsilon) = a\varepsilon$$

genügt. Sei dann die Funktionalgleichung mit konstanten Koeffizienten:

(25) $$f(A) \equiv a_0 A^n(\alpha) + a_1 A^{n-1}(\alpha) + \cdots + a_{n-1} A(\alpha) + a_n \alpha = 0$$

vorgelegt. Wenn die algebraische Gleichung:

(26) $$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

42) Sur la généralisation des identités, Genève mém. inst. nat. 16 (1886); Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896. Vgl. auch die Genfer Thesen von *Cailler*, recherches sur les équation partielles et sur qques. points du calcul de généralisation, 1887, u. von *D. Mirimanoff*, sur les bases du calcul de généralisation, 1900.

43) Vgl. *Cauchy*, Exercices de math. 2, Paris 1827, p. 161.

44) Par. C. R. 134 (1902), p. 1193.

die n einfachen Wurzeln $a, b, c, \ldots, h$ hat, so ist die allgemeinste Lösung der Gleichung (25) die Funktion:

$$\omega = k_1 \varepsilon(a) + k_2 \varepsilon(b) + \cdots + k_n \varepsilon(h), \tag{27}$$

in der $k_1, k_2, \ldots, k_n$ willkürliche Konstante bedeuten. Sind die Wurzeln von (26) nicht alle einfach, ist z. B. a eine r-fache Wurzel, so sind r Glieder von ω zu ersetzen durch:

$$k_1 \varepsilon(a) + k_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} + \cdots + k_r \frac{\partial^r \varepsilon}{\partial a^r}. \tag{28}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$f(A) \equiv a_0 A^n(\alpha) + a_1 A^{n-1}(\alpha) + \cdots + a_n \alpha = \varphi, \tag{29}$$

in der φ eine gegebene Funktion bedeutet, ist:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{f'(a)}(A-a)^{-1}\{\varphi\} + \frac{1}{f'(b)}(A-b)^{-1}\{\varphi\} + \cdots \\ \qquad\qquad + \frac{1}{f'(h)}(A-h)^{-1}\{\varphi\}, \end{cases} \tag{30}$$

wenn die Wurzeln von (26) alle einfach sind. Der Fall mehrfacher Wurzeln bietet keine besondere Schwierigkeit; ebensowenig die Ausdehnung auf Funktionen von mehreren Variabeln.

Die vorhergehende Methode, in der Form mehr oder weniger modifiziert, führt zur Auflösung der homogenen und nicht homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (*Boole*, Treatise on diff. equat.); der Differenzengleichungen mit endlichen Koeffizienten (*Boole, Casorati*); der Gleichungen der Form (25), in denen A die Operation xD bedeutet — sie lassen sich durch die Substitution $x = e^t$ auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen — (*Boole, Carmichael*); derjenigen, in welchen $A = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ ist (*Spottiswoode*); derjenigen, in welchen A die in Nr. **6** besprochene Operation S_μ der Substitution ist (*Lémeray*[45])). Sie lässt sich auch ausdehnen auf gewisse Klassen von Gleichungen mit variablen Koeffizienten (*Boole, Russell*) und von nicht linearen Gleichungen (*Hargreave*); auf Systeme simultaner Differentialgleichungen (*Carmichael*); auf die Auswertung bestimmter Integrale (*Bronwin, Russell*) u. s. w.[46]).

10. Anwendungen auf Differentialgleichungen. Der formale Teil der Theorie der linearen Differentialgleichungen vereinfacht sich in bemerkenswerter Weise durch den Gebrauch der symbolischen

45) Ibid. 125 (1897), p. 1160.

46) Die allgemeine Methode geben *Pincherle*, Torino Atti 30 (1895), p. 524; *Pincherle* e *Amaldi*, Le operazioni distributive, Bologna 1901.

Methoden[47]). Sei F die linke Seite einer linearen Differentialgleichung; F ist ein distributives Operationssymbol, das den Namen „linearer Differentialausdruck“ erhalten hat. Für diese Ausdrücke kann man eine Algebra geben, analog zu der der ganzen Polynome: Zerlegung in Faktoren, Teilbarkeit, Quotient zur rechten und zur linken; das Problem der Integration der Gleichung $F = 0$ lässt sich zurückführen auf das der Zerlegung von F in ein — im allgemeinen nicht kommutatives — Produkt symbolischer Faktoren; die Kenntnis partikulärer Integrale von $F = 0$ erlaubt Faktoren von F zu bestimmen und die Integration der Gleichung auf die einer Gleichung niedrigerer Ordnung zurückzuführen; dieselben Bemerkungen geben eine Methode zur Bestimmung der gemeinsamen Teiler zweier Formen und erlauben ihre Reduzibilität zu definieren. Endlich[48]) die Gleichung $F(\alpha) = \varphi$, in der α die unbekannte Funktion bedeutet, hat eine durch die Entwicklung:

$$\sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m D^{-m} \varphi \tag{31}$$

darstellbare Lösung, in der n die Ordnung von F bedeutet und die Koeffizienten λ_m durch eine $(n+1)$-gliedrige lineare Rekursionsformel verbunden sind.

Für die linearen Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten hat man ganz analoge Resultate[49]).

11. Anwendungen auf Formen- und Zahlentheorie. Die Prinzipien des Rechnens mit Symbolen lassen sich auch auf andere Gebiete anwenden. Sie bilden einen Teil der Gesetze, die das Rechnen mit invarianten Formen nach *Cayley*, *Aronhold* und *Clebsch* (I B 2, Nr. **12, 13**) beherrschen. Sie können auch dazu dienen, gewisse Entwicklungen der analytischen Zahlentheorie (I C 3) in kondensierter Form darzustellen.

So lassen sich, wenn man übereinkommt, nach Ausführung der

---

47) *G. Libri*, J. f. Math. 10 (1836), p. 185; *A. Cauchy* (anciens) Exercices de math. 1, Paris (1826), p. 53; *E. Brassinne*, Note zum Cours d'analyse von *Ch. Sturm*, Paris 1868; *L. Thomé*, J. f. Math. 76 (1873), p. 273; *Vaschy*, J. éc. polyt. cah. 63 (1893), p. 39; *L. Heffter*, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipz. 1894; *L. Schlesinger*, Handbuch der lin. Differentialgleich. 1, Leipz. 1895, Abschn. II; *A. R. Forsyth*, Theory of differ. equat. 1, Cambr. 1897; *Pincherle* e *Amaldi*, operaz. distrib. cap. XI.

48) Palermo Rendic., 11 apr. 1897.

49) *Libri*, J. f. Math. 10 (1836), p. 185; *Pincherle*, Bologna Mem. (5) 5 (1895), p. 87. Für Anwendungen des Gebrauches der Symbole in der Theorie der Differenzenausdrücke, s. u. a. *A. Guldberg*, Par. C. R. octobre 1897; Christiania Skrifter 1897, Nr. 10; *Thora Groth*, Nyt Tidskr. f. Math. 16, p. 1, Copenhagen 1905.

Rechnung die Exponenten von a, b, c durch Indices zu ersetzen, die Polynome:

(32) $$a_0 + n a_1 x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

(33) $$b_0 c_n x^n + n b_1 c_{n-1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} b_2 c_{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + b_n c_0 y^n,$$

bezw. schreiben:

$$(1 + ax)^n, \quad (cx + by)^n;$$

die Reihe:

(34) $$a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

kann geschrieben werden e^{ax} u. s. w. u. s. w. Dabei findet man, wie *Boole* anmerkt „a connexion which in some instances involves far more than a merely formal analogy" (vgl. Nr. **4**). Durch Differentiation des Polynoms:

$$\sum_k \binom{n}{k} b_k c_{n-k} x^{n-k} y^k$$

überzeugt man sich, dass sich seine partiellen Ableitungen durch

(35) $$nc(cx + by)^{n-1}, \quad nb(cx + by)^{n-1}$$

ausdrücken, mit anderen Worten: die Differentiation kann an dem symbolischen Ausdruck vollzogen werden. Die Identität:

(36) $$f(z + a + h) = f(z + h + a)$$

bleibt bestehen, wenn man nach Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von a diese Potenzen durch die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ einer beliebigen Folge ersetzt; daraus entspringen zahlreiche Formeln [50]), die wir hier beiseite lassen, da sie dem Gebiete der Differenzenrechnung (I E) angehören. Erwähnt sei nur noch die symbolische Schreibweise der Rekursionsformel der *Bernoulli*'schen Zahlen [51]):

(37) $$(B + 1)^n - B^n = n.$$

J. L. Jensen [52]) hat neuerlich die symbolische Betrachtung der distributiven Operationen angewandt, um vielfache Formeln, im besonderen fast alle bekannten Identitäten zwischen Binomialkoeffizienten zu erhalten.

---

50) Z. B. die Summenformeln von *Euler* und von *Maclaurin*. Vgl. etwa *G. Boole*, Grundlehren der endlichen Differenzen und Summenrechnung, deutsch von *C. Schnuse*, Kap. VII und passim, Braunschweig 1867; *A. Markoff*, Differenzenrechnung, deutsch von *T. Friesendorff* und *E. Prümm*, Kap. VIII und IX, Leipzig 1896; *E. Cesàro*, Analisi algebrica, Torino 1894, § 41 ff. sowie Encykl. I E.

51) Vgl. Encykl. II A 3, Nr. **18**. Zahlreiche analoge Formeln bei *E. Lucas*, Théorie des nombres, Paris 1891, chap. 13 und bei *Cesàro*, Analisi algebrica § 40.

52) Acta math. 26 (1902), p. 314.

12. Vektorielle Interpretation in einem Raume von n Dimensionen. Bisher waren die Objekte der Operationen beliebige Funktionen, die Operationen selbst von gegebener Art. Betrachten wir jetzt *distributive* Operationen, deren Natur nicht von vornherein festgelegt ist, deren *Objekte* und *Resultate* einer bestimmten n-dimensiosionalen[53]) Mannigfaltigkeit:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \tag{38}$$

angehören, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n linear unabhängige Elemente der Mannigfaltigkeit sind, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante. Z. B. kann die Mannigfaltigkeit von einer linearen Klasse von Funktionen gebildet sein; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind dann linear unabhängige Funktionen. Unter dieser Voraussetzung findet man, dass die distributiven Operationen nichts anderes sind, als die *Kollineationen*, die die gegebene Mannigfaltigkeit (einen n-dimensionalen Raum) in sich transformieren: die Zusammensetzung und Zerlegung der Operationssymbole fällt zusammen mit der Zusammensetzung und Zerlegung der Kollineationen (III A 6; C 8). Unter diesem Gesichtspunkt sind die elementaren Eigenschaften der distributiven Operationen von *E. Laguerre*[54]), von *G. Peano*[55]) und für $n = 3$ ausführlicher von *E. Carvallo*[56]) gegeben worden. Der letztere betrachtet die Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit als Vektoren (III B 3) in einem n-dimensionalen Raume. Ist A eine gegebene Operation, so sind diejenigen Vektoren, für welche $A(\alpha) = 0$ ist, besonders wichtig; sie geben die „Extinktionsrichtungen"[57]) oder einfacher die Wurzeln von A. Eine Kollineation, die Wurzeln zulässt, ist *ausgeartet*, und man kann den Grad ihrer Ausartung definieren. Mehrere Wurzeln von A definieren einen linearen Raum, dessen sämtliche Elemente Wurzeln von A sind („Wurzelraum"). Jede Wurzel von A ist zugleich Wurzel von A^m, aber nicht umgekehrt; eine Wurzel von A^m, die nicht zugleich Wurzel von A^{m-1} ist („eigentliche Wurzel von A^m") hat besonderes Interesse. Die Wurzeln von $A - z$, d. h. diejenigen Vektoren α, für für welche $A(\alpha) = z\alpha$ ist, sind die invarianten Elemente der Kollineation A; sie existieren nur für bestimmte Werte von z, nämlich

53) Einer n-dimensionalen, wenn man $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Vektoren ansieht einer $(n-1)$-dimensionalen, wenn man Homogeneität einführen will, d. h. wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als Punkte ansieht und dabei $c\alpha_1$ als einen von α_1 nicht verschiedenen Punkt betrachtet

54) J. éc. polyt. cah. 42 (1867), p. 215; Oeuvres 1, p. 221.

55) Calcolo geometrico, Torino 1888, cap. X.

56) Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 177, 225, 311.

57) Nach *Carvallo,* ibid. p. 195.

für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, der *Fundamentalgleichung* (II B 4 und III C 8)[58]. Sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung nicht alle einfach, so führt die Untersuchung der eigentlichen Wurzeln der Potenzen von $A - z$ zur Zerlegung von A in einfachere Faktoren; man findet so durch eine synthetische Methode die von *Weierstrass* entwickelte Theorie der Elementarteiler der bilinearen Formen (I B 2, C 2) wieder. In dieser Theorie haben mehrere Autoren[59] von einer symbolischen Bezeichnung Gebrauch gemacht, die der im Operationskalkül verwendeten nahekommt.

13. Interpretation in einem Raume von unendlich vielen Dimensionen. Die Prinzipien des Rechnens mit Symbolen zusammen mit Überlegungen der Geometrie der linearen Räume geben der Theorie der distributiven Operationen einen hohen Grad von Klarheit und Einfachheit, soweit diese Operationen an den Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionenzahl ausgeübt werden, mögen diese Elemente nun Funktionen sein oder nicht. Man kann sich fragen, ob sich diese Überlegungen auf alle Funktionen einer linearen Mannigfaltigkeit ausdehnen lassen, wenn die Anzahl der Dimensionen dieser Mannigfaltigkeit (abzählbar) unendlich ist. Die Frage ist zu bejahen: so kann man z. B. die Mannigfaltigkeit S (*Funktionalraum*) der Potenzreihen α einer Variabeln x ins Auge fassen und dann die Gesamtheit der distributiven Operationen untersuchen, die jedes Element dieser Mannigfaltigkeit in ein Element derselben Mannigfaltigkeit überführen[60]. Diese Operationen *bilden eine Gruppe*. Man kann für sie eine zur *Stetigkeit* analoge Eigenschaft definieren[61] und dann die Bedingungen ableiten, unter welchen die distributive Eigenschaft der Operation A sich auf eine unendliche Reihe überträgt, d. h. unter welchen man *thatsächlich* hat:

$$A\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}A(\alpha_n), \tag{39}$$

58) *Pincherle*, Lomb. Rend. 29 (1896), p. 400; *Pincherle* e *Amaldi*, Operazioni, cap. III, IV.

59) *G. Frobenius*, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. f. Math. 84 (1878), p. 1; *E. Study*, Monatsh. 2 (1891), p. 23; *Sforza*, Giorn. di mat. 34 (1896), p. 252 u. s. w.

60) *S. Pincherle*, Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 142; Math. Ann. 49 (1897), p. 349; *C. Bourlet*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 133. Bei *Bourlet* heissen die distributiven Operationen „*transmutations additives*". Wegen der Ausdehnung auf Operationen an mehreren Funktionen oder an Funktionen von mehreren Veränderlichen vgl. man *B. Calò*, Linc. Rend. (5) 4^2 (1895), p. 52.

61) *Bourlet*, Ann. éc. norm. (3) 14, § 1; *G. Hadamard*, Par. C. R., 9 février 1903.

wo $\sum \alpha_n$ eine in einem geeigneten Bereich der Variabeln konvergente Reihe bedeutet. Im Raume S stellt jede Potenzreihe einen *Vektor* oder einen *Punkt* vor, ihre Koeffizienten sind die Koordinaten des Vektors oder Punktes[62]); die distributiven Operationen, die sich auf Potenzreihen anwenden lassen, sind die Kollineationen dieses Raumes. Diese Kollineationen können wie bei einer endlichen Anzahl von Dimensionen ausarten; nur hat man hier zwei Arten von Ausartungen zu unterscheiden: die Operation A kann in der Mannigfaltigkeit Wurzeln zulassen: Ausartung *erster Art;* oder wenn α die Mannigfaltigkeit S beschreibt, kann $A(\alpha)$ einen in S enthaltenen, aber nicht mit ihr identischen Raum beschreiben, sodass die Gleichung $A(\alpha) = \varphi$ nicht für jedes φ Lösungen in S hat: Ausartung *zweiter Art*[63]). (Bei Kollineationen in Räumen von endlicher Dimensionenzahl ist jede dieser beiden Eigenschaften eine Folge der anderen.)

Die Gesamtheit derjenigen Elemente von S, die einer linearen Relation (mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl) genügen, kann als eine *Ebene* von S bezeichnet werden. Jeder Operation A, die die Elemente von S transformiert, entspricht eine Operation $\bar{A}$, die die Ebenen so transformiert, dass dabei die Bedingung der Koinzidenz von Punkten und Ebenen erhalten bleibt, sie heisst die *Adjungierte* von A. Sind dann $\bar{B}$, $\bar{C}$ die Adjungierten von B, C, so gilt:

$$\text{wenn } A = BC, \text{ so ist } \bar{A} = \bar{C}\bar{B}.$$

Ist A ein linearer Differentialausdruck (Nr. **10**), so ist $\bar{A}$ seine *Lagrange'sche* Adjungierte (II B 4). Zu einem linearen Ausdruck mit endlichen Differenzen erhält man die Adjungierte, indem man jeden Term $f_j(x)\,\alpha(x+j)$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$ durch $f_j(x-j)\,\alpha(x-j)$ ersetzt[64]).

14. Darstellung einer distributiven Operation durch eine Reihe. Wendet man einen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung F auf ein Produkt $\alpha\beta$ an, so erhält man unmittelbar die folgende Formel, ein Analogon zu der von *Taylor* für eine rationale ganze Funktion:

$$(40)\quad F(\alpha\beta) = F(\alpha)\beta + F'(\alpha)D\beta + \frac{1}{2}F''(\alpha)D^2\beta + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}_{(\alpha)}D^n\beta;$$

dabei werden $F', F'', \ldots$ erhalten, indem man in F die gewöhnlichen Regeln der Differentiation in Bezug auf das Symbol D anwendet, und

62) *T. Cazzaniga,* Torino Rend. 34 (1899), p. 510.

63) *Pincherle,* Lomb. Rend. 30 (1897), p. 103; *Pincherle* e *Amaldi,* cap. 16; *Hadamard,* Série de Taylor, p. 80.

64) *Pincherle,* Bologna Rend. 2 (1898), p. 130; *E. Bortolotti,* Linc. Rend. (5) 7^1 (1898), p. 257; 7^2, p. 46, p. 74.

können folglich als aufeinander folgende *Ableitungen* von F bezeichnet werden[65]. Man hat:

$$F'(\alpha) = F(\alpha x) - xF(\alpha). \tag{41}$$

Analog hat man, wenn A das Symbol irgend einer distributiven Operation ist, die Operation:

$$A'(\alpha) = A(x\alpha) - xA(\alpha) \tag{42}$$

Funktionalableitung von A genannt. Bezeichnet man sie durch den Accent, so hat man die Identität[66]:

$$(AB)' = A'B + AB'. \tag{43}$$

Entsprechend definiert man die successiven höheren Funktionalableitungen; man gelangt dann zu der Formel[67]:

$$A(\alpha\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(\alpha) D^n \varphi, \tag{44}$$

die zum *Taylor*'schen Satz der Funktionentheorie analog ist. Betrachtet man in ihr α als ein festes, φ als ein veränderliches Element, so hat man den Satz, dass im allgemeinen jede distributive Operation sich durch eine nach Potenzen des Ableitungssymbols D geordnete unendliche Reihe darstellen lässt — ein Analogon zu der Darstellung jeder analytischen Funktion durch eine nach Potenzen der Variabeln fortschreitende Reihe. Was die Frage nach der effektiven Giltigkeit der Formel (44) betrifft, so findet man, dass sie immer einen *Funktionalkonvergenzbereich* hat, d. h. dass es immer eine lineare Mannigfaltigkeit von Funktionen φ giebt, für die die rechte Seite von (44) konvergiert und die linke Seite wirklich darstellt.

Aus (44) folgt, dass das Problem der Aufsuchung der Wurzeln einer distributiven Operation und das ihrer Inversion sich zurückführen lassen auf das der Integration einer homogenen, bezw. nicht homogenen linearen Differentialgleichung von im allgemeinen unendlich hoher Ordnung. Gleichungen dieser Art weisen gewisse Analogien mit den Gleichungen endlicher Ordnung auf[68]; aber man hat von ihnen noch keine allgemeine Theorie.

Es ist bemerkenswert, dass die Konvergenz der Reihen (44) keineswegs eine Eigenschaft verlangt, die ein Analogon der Stetigkeit wäre. Dagegen ist die Betrachtung eines solchen Analogon erforderlich, wenn man z. B. als Mannigfaltigkeit der Objekte (als Funktionalraum) die

65) *D'Alembert,* Théorie des vents, Berlin mém. 1746.

66) *Pincherle,* Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 145; Math. Ann. 49 (1897), p. 353.

67) S. cit. [66]; *Bourlet,* Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), § 5, p. 149.

68) *Bourlet,* ibid. § 11, p. 178 und 16 (1899), p. 333.

(nicht mehr abzählbare) Gesamtheit F der reellen und stetigen Funktionen zwischen a und b betrachtet, um Darstellungen der Operationen durch Reihen zu erhalten. Ist U eine distributive Operation, die ein Element f von F in eine bestimmte und endliche Zahl c transformiert,

$$U(f) = c,$$

und konvergiert $U(f)$ gegen $U(f_1)$, wenn f gegen f_1 gleichmässig konvergiert, so nennt man[69]) U eine *Linearoperation.* Für solche Operationen kann man durch Gebrauch der *Fourier*'schen Reihe, für U die Entwickelung

$$U(f) = \sum a_n U_n(f)$$

erhalten[70]), wo $U_n(f)$ die besondere Linearoperation ist:

$$U_n(f) = \int_0^\pi f(x) \cos nx\,dx$$

und

$$a_0 = \frac{1}{\pi} U(1), \quad a_n = \frac{2}{\pi} U(\cos nx).$$

15. Darstellung einer Operation durch ein bestimmtes Integral. Ist φ eine analytische Funktion, so kann man in (44) $D^n \varphi$ ersetzen durch seinen Ausdruck vermittelst des *Cauchy*'schen Integrals:

$$D^n \varphi(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{n+1}}, \tag{45}$$

in dem l eine geschlossene Kurve in einem Bereich bedeutet, in dem die Funktion φ regulär ist. So erhält man zuerst für die Operation A, dann auch für allgemeinere Operationen, eine Darstellung der Form:

$$A(\varphi) = \int_{(l)} \pi(x, y)\, \varphi(y)\, dy; \tag{46}$$

dabei bedeutet $\pi(x, y)$ eine Funktion von zwei Variabeln, die nur von der Natur der darzustellenden Operation abhängt, φ dagegen ist eine Funktion, die in einem geeigneten Funktionalbereich willkürlich veränderlich ist, l irgend ein Integrationsweg. Verschiedene Operationen haben sich in der Form (46) oder in der allgemeineren:

$$A(\varphi) = \int^{(r)} \pi(x, y_1, y_2, \ldots, y_r)\, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_r)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_r \tag{47}$$

dargeboten[71]); die wichtigsten werden in den folgenden Nummern

69) *G. Hadamard,* Par. C. R., 9 février 1903.

70) *M. Fréchet,* Trans. of the Amer. Math. Soc. 5 (1904), p. 493.

71) *A. Viterbi,* Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 261; 3 (1899), p. 299, betrachtet die durch Integrale dargestellten Funktionaloperationen als Elemente eines Kalküls, den er entwickelt.

angeführt. Das Problem der Bestimmung der Inversen zu einer in der Form (46) oder (47) dargestellten Operation ist identisch mit dem der *Umkehrung der bestimmten Integrale* (Nr. **28**—**31**).

Hadamard[72]) hat bewiesen, dass die stetigen Linearoperationen $U(f)$ (Nr. **14**), die einer stetigen reellen, zwischen a und b gegebenen Funktion f eine bestimmte Zahl zuordnen, immer Darstellung in Form des lim eines bestimmten Integrals besitzen; die Darstellung selbst lautet:

$$U(f) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) K_n(x) dx,$$

wo $K_n(x)$ wieder eine zwischen a und b stetige Funktion ist.

16. Die Transformation von Laplace. Unter den in der Form (46) auftretenden distributiven Operationen ist eine der wichtigsten die nach *Laplace* genannte Transformation, die durch:

$$A(\varphi) = \int_{(l)} e^{xy} \varphi(y)\, dy \tag{48}$$

gegeben ist. Durch Einführung einer neuen Variabeln $t = e^y$ erhält man aus ihr:

$$B(\varphi) = \int t^x \varphi(t)\, dt. \tag{49}$$

Die Inverse der *Laplace*'schen Transformation ist eine Transformation derselben Form[73]). Die zweite Form (49) ist zuerst betrachtet worden[74]); in ihr heisst $\varphi(t)$ „*fonction génératrice*", das Resultat $\alpha(x) = B(\varphi)$: „*fonction déterminante*". Die letztere ist für ganzzahlige x der Koeffizient von t^{-x-1} in der Potenzreihenentwicklung von $\varphi(t)$.[75]) Bei geeigneter Wahl des Integrationsweges hat die Operation A die Eigenschaften[76]):

$$DA\varphi(y) = A(y\varphi(y)), \quad xA\varphi(y) = -AD\varphi(y), \tag{50}$$

und die Operation B die daraus folgenden

$$B(t\varphi(t)) = \alpha(x-1), \quad B\left(t\frac{d\varphi}{dt}\right) = x\alpha(x). \tag{51}$$

72) Vgl. Fussnoten 69) und 70).

73) *Cauchy*, Exercices de Math. 2, Paris 1827, p. 157.

74) *P. S. de Laplace*, Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (Oeuvres 7, p. 85); *N. H. Abel*, Sur les fonctions génératrices (Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 2, p. 67).

75) *Laplace*, Par. mém. 1779 (82); *Lacroix*, Traité du calcul différentiel etc. 2ᵉ éd. 3, Paris 1819, Ch. IV, p. 322, p. 573. Dieses zuerst von *Laplace* betrachtete Entsprechen ist in letzter Zeit von *Hadamard, Borel, Fabry, Le Roy* u. a. unter neuen Gesichtspunkten behandelt worden; vgl. II B 1, Nr. **35**, **37**.

76) *Abel*, Oeuvres 2, p. 68.

Die Eigenschaften (50) können zur Definitionen von A dienen[77]; ihre wiederholte Benutzung führt zu zahlreichen Anwendungen. Die wichtigste ist die Transformation einer linearen Differentialgleichung mit rationalen ganzen Funktionen als Koeffizienten in eine andere, in der Ordnung der Ableitungen und Grad der Koeffizienten vertauscht sind, und die Ableitung des Integrals der einen aus dem der anderen. Was dieser Anwendung ein spezielles Interesse giebt, ist der Umstand, dass man auf diese Weise gewisse Klassen „irregulärer“ Differentialgleichungen in „reguläre“ transformieren kann, was einen Beitrag zur Integration der ersteren liefert[78]. Der einfachste Fall ist der, dass die irreguläre Differentialgleichung die nach *Laplace* benannte ist, d. h. die Gleichung beliebiger Ordnung mit Koeffizienten ersten Grades in x; ihre Transformierte ist von der ersten Ordnung, und die gegebene Gleichung lässt sich ebenfalls durch Quadraturen integrieren[79]. Zwischen einem linearen Differentialausdruck F, seiner *Laplace'schen* Transformierten $AFA^{-1} = F_1$ und seiner *Lagrange*schen Adjungierten $\overline{F}$ [80]) besteht die Relation[80]:

$$\overline{F} = A\overline{F}_1 A^{-1}. \tag{52}$$

Eine andere Anwendung besteht in der Transformation einer Potenzreihe in einem linearen Differentialausdruck unendlich hoher Ordnung. Hierher gehört die Transformation einer Summe von Exponentialgrössen:

$$\sum_h c_h e^{\alpha_h x}$$

in einen Ausdruck der Form[81]:

$$\sum_h \sum_n \frac{c_h}{n!} a_h^n D^n \varphi = \sum_h c_h \varphi(x + a_h); \tag{53}$$

ferner die Transformation des Ausdrucks von *Legendre*:

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x e^{\beta x} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{1 \cdot 2} x^2 e^{2\beta x} + \cdots \tag{54}$$

---

77) *Pincherle*, Bologna mem. (10) 8 (1887); Ann. éc. norm. (3) 22 (1905), p. 9; *Amaldi*, Linc. Rend. (5) 7^2 (1898), p. 117; *Pincherle* e *Amaldi*, cap. XIII.

78) Wegen der Anwendung der Transformation von *Laplace* auf die linearen Differentialgleichungen vgl. man namentlich *H. Poincaré*, Amer. J. of math. 7 (1885), p. 217 und Acta math. 8 (1886), p. 295; dann die Darstellungen von *L. Schlesinger*, Handbuch der lin. Differentialgl. 1, Leipz. 1895, Abschn. VII und von *E. Picard*, Traité d'analyse 3, Paris 1896, chap. XIV; ferner *J. Horn*, Math. Ann. 49 (1897), p. 453; weiteres vgl. II B.

79) *C. Jordan*, Cours d'analyse 3, Paris 1887, p. 253.

80) *Schlesinger*, Handbuch 1, p. 426.

81) *Abel*, Oeuvres 2, p. 170.

in die Reihe von *Abel*[82]):

$$(55)\quad \varphi(t+\alpha) = \varphi(t) + \alpha\varphi'(t+\beta) + \frac{\alpha\cdot(\alpha-2\beta)}{1\cdot 2}\varphi''(t+2\beta) + \cdots,$$

eine Verallgemeinerung der *Taylor*'schen Reihe.

Bei geeigneter Wahl des Integrationsweges transformiert die Operation von *Laplace* x^n in $(-1)^n n!\, x^{-n-1}$ und umgekehrt; man kann also auf sie durch Einführung einer neuen Veränderlichen eine von *E. Borel*[83]) in die Theorie der Potenzreihen eingeführte Transformation zurückführen. Bei dieser wird nämlich in einer solchen Reihe a_n durch $a_n/n!$ ersetzt, wodurch die Singularitäten der Funktion auf dem Konvergenzkreis ins Unendliche geworfen werden. *Borel*'s Theorie der sogenannten „sommation exponentielle“[84]), (durch welche einigen Klassen von divergenten Reihen eine analytische Bedeutung beigelegt werden kann) ist in mannigfaltiger Weise mit der Transformation von *Laplace* eng verwandt; wie von anderer Seite die von *H. Poincaré*[85]) ausgebaute Theorie der asymptotischen Reihen. Auch die von *G. Mittag-Leffler* eingeführte analytische Funktionaltransformation[86]), die

$$\sum a_n x^n$$

in

$$\sum \frac{a_n x^n}{\Gamma(na+1)}$$

transformiert, kann als eine Erweiterung der Transformation von *Laplace* betrachtet werden.

In der Form (49) führt die *Laplace*'sche Transformation die linearen Differentialgleichungen in lineare Differenzengleichungen über; daraus ergiebt sich die Integration der einen mit Hilfe der anderen und die Lösung der Differenzengleichungen durch bestimmte Integrale[87]). Endlich die Entwicklung einer Funktion in eine nach Faktoriellen fortschreitende Reihe[88]) lässt sich zurückführen auf die

82) ibid. und Oeuvres 1, p. 102. Vgl. auch *Halphen*, Paris soc. math. 10 (1882), p. 67; *V. Pareto*, J. f. Math. 110 (1892), p. 290.

83) Acta math. 21 (1897), p. 243.

84) Ann. éc. norm. 16^3 (1899), p. 50.

85) Acta math. 8 (1896), p. 295.

86) Par. C. R. 136 (1902), p. 937; 137 (1903), p. 554; 138 (1904), p. 881, 941; Linc. rend. (5) 13 (1904), p. 3; Acta math. 29 (1905), p. 101.

87) *Laplace*, vgl. Fussnote 74), 75); *Pincherle*, Lomb. Rend. (2) 19 (1886); Acta 16 (1892), p. 341; *Hj. Mellin*, Acta math. 8 (1886), p. 79; 9 (1886), p. 137; 25 (1901), p. 139.

88) Dieses Problem ist neuerdings behandelt von *J. C. Kluyver*, Amsterd. nieuw arch. (2) 4 (1900); Paris C. R. 134 (1902), p. 587; *N. Nielsen*, Paris C. R.

„exponentielle Darstellung" dieser Funktion (nach der Ausdrucksweise von *Desaint*[89]), d. h. auf die Bestimmung ihrer *Laplace*'schen Transformierten.

17. Andere distributive Operationen.

a) Unter den Funktionaloperationen, die sich durch bestimmte Integrale darstellen lassen, ist eine der am häufigsten benutzten die Transformation von *Heine*[90]) oder von *Euler*, nämlich:

$$A_s(\varphi) = \int\limits_{(l)} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^s}, \tag{56}$$

unter l einen passend gewählten Integrationsweg verstanden. Auch sie kann zum Übergang von einer linearen Differentialgleichung zu einer anderen dienen. Gehört die erste zur „*Fuchs*'schen Klasse", so gilt für die zweite dasselbe. Aus der Gruppe der einen kann man die der anderen ableiten. Die charakteristischen Eigenschaften der Operation A_s drücken sich aus durch die Gleichungen:

$$A_s D\varphi = DA_s\varphi, \quad DA_s'\varphi = sA_s\varphi, \tag{57}$$

in denen A_s' die Funktionalableitung (Nr. **14**) von A_s bedeutet. Wie für die *Laplace*'sche Transformation (Nr. **16**) gilt, wenn $\bar{F}$ die adjungierte und F_1 die *Euler*'sche Transformierte eines linearen Differentialausdrucks bedeutet, die Relation[91]):

$$\bar{F} = A_s\bar{F}_1A_s^{-1}. \tag{58}$$

Auch ist:

$$A_sA_t = A_{s+t}; \tag{59}$$

die Transformationen A_s bilden also eine eingliedrige kontinuierliche Gruppe im Sinne von *Lie* (II A 6, Nr. 2). Die Operation A_s dient zur Integration der *Gauss*'schen hypergeometrischen Differentialgleichung durch Quadraturen[92]), denn sie transformiert sie in eine Gleichung 1. Ordnung; sie lässt sich auch auf die verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung von *Pochhammer* und auf deren

133 (1901), p. 1273; 134 (1902), p. 157; Ann. éc. norm. (3) 19 (1902), p. 409; Math. Ann. 59 (1904), p. 355; Kopenh. Skrift. (2) 2 (1904), p. 59.

89) Vgl. Fussnote 44).

90) J. f. Math. 60 (1862), p. 252; 61 (1863), p. 356; 62 (1863), p. 110; Handb. der Kugelfunktionen 1, 2. Aufl., Berl. 1881, III. Teil, namentlich p. 466 ff. Litteratur dieser Transformation bei *L. Schlesinger*, Handb. der lin. Diff.-Gl. 2, Leipzig 1897, p. XV—XVI; vgl. auch II B 4.

91) *Schlesinger* 2, p. 416; *Pincherle*, J. f. Math. 119 (1898), p. 347.

92) *C. Jordan*, Cours d'analyse 3, Paris 1887, p. 241. Vgl. *B. Riemann*, Nachträge, herausgegeben von *M. Noether* und *W. Wirtinger*, Leipzig 1902, p. 88.

Lösung durch bestimmte Integrale anwenden[93]); endlich auch auf die lineare Differentialgleichung von *Goursat*[94]).

b) Die durch:

$$A_\pi(\varphi) = \int_{(l)} \pi(y-x)\,\varphi(y)\,dy \tag{60}$$

— π das Zeichen irgend einer gegebenen Funktion, φ das der willkürlichen Funktion, an der man operieren will — dargestellten Operationen bilden eine Gruppe von mit der Ableitung vertauschbaren Operationen[95]):

$$A_\pi D = D A_\pi. \tag{61}$$

Wendet man eine solche Operation auf eine Potenzreihe an, so erscheint sie als Verwandlung der Potenzen x^n im Polynome $\alpha_n(x)$, die der Rekursionsformel:

$$\frac{d\alpha_n}{dx} = n\alpha_{n-1} \tag{62}$$

genügen. Diese Polynome haben sich zuerst *Halphen*[96]) dargeboten und sind dann von *P. Appell*[97]) untersucht worden; ihr allgemeiner Ausdruck ist:

$$\alpha_n(x) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n, \tag{63}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ willkürliche Konstante bedeuten. Die Inverse einer Operation A_π ist eine Operation derselben Gruppe[97]).

c) Von speziellen distributiven Operationen sei die „interpolare Operation" erwähnt, die durch:

$$A_a(\varphi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \tag{64}$$

definiert ist[98]). Die Operationen A_a, A_b sind vertauschbar[99]). Bei Gebrauch dieser Operation kann man einen Ausdruck für das Restglied der *Newton*'schen Interpolationsformel geben[100]).

93) J. f. Math. 71 (1870), p. 316; 73 (1871), p. 69; Math. Ann. 35 (1890), p. 470

94) Ann. éc. norm. (2) 12 (1883), p. 261, 495; *Pincherle*, Sulle funzioni ipergeometriche, cap. VII; Giorn. di mat. 32 (1894), p. 65.

95) *Pincherle*, Acta math. 10 (1886), p. 153; *T. Levi-Civita*, Lomb. Rend. 1895, p. 533.

96) Paris C. R. 93 (1881), p. 833.

97) Ann. éc. norm. (2) 9 (1880), p. 119.

98) Note von *G. Peano* zu *Genocchi* e *Peano*, Calcolo differenziale, Torino 1884, p. XX (p. 323 der deutschen Übersetz. von *Lüroth* u. *Schepp*, Leipz. 1899); *Jensen*, Kopenh. overs. 1894, p. 3.

99) *Jensen*, ebenda p. 3.

100) *Jensen*, ebenda p. 5.

d) Bei Untersuchung der Potenzreihenentwicklung der Wurzeln einer Gleichung:

$$y^n + \varphi_1(x)\, y^{n-1} + \varphi_2(x)\, y^{n-2} + \cdots + \varphi_n(x) = 0, \tag{65}$$

in der die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ selbst Potenzreihen sind, gebraucht *H. Schapira*[101]) zwei distributive Operationen, die er als *„Partialisieren“* und *„Kompletieren“* bezeichnet — sie beruhen auf der Ersetzung von x durch εx, unter ε eine Wurzel der Einheit verstanden; und eine dritte, die er *Differentialsubstitution* nennt —; sie ist das Produkt aus der Operation D in die Operation θ^h (Nr. **6**).

18. Nicht distributive Operationen. Von allgemeinen Sätzen über nicht distributive Operationen oder Operationsgruppen kennt man nur wenige. *T. Levi-Civita*[102]) fragt nach denjenigen Gruppen von Operationen, die Funktionen[103]) eines und desselben Operationssymbols A sind und die Eigenschaft haben, dass das Produkt $\Phi_1 \Phi_2$ sich als analytische Funktion von $\Phi_1(A)$, $\Phi_2(A)$ und A ausdrücken lässt. Er löst die Frage mit Hilfe der allgemeinen Methoden der Theorie der kontinuierlichen Gruppen (II A 6) und findet, dass eine solche Relation nur möglich ist, wenn das zweite Glied die Form hat:

$$\lambda(\lambda^{-1}(\Phi_1) + \lambda^{-2}(\Phi_2)), \tag{66}$$

wo λ eine willkürliche Funktion, λ^{-1} ihre Inverse bedeutet; die Definitionsgleichungen der Gruppe (II A 6, Nr. **3**) müssen die Form haben:

$$\sum_i p_i(A) \frac{d^i \lambda^{-1} \Phi}{d A^i} = 0. \tag{67}$$

C. Bourlet[104]) sucht die allgemeinsten Funktionaloperationen A von der Art, dass

$$A(\pi(\alpha, \beta)) = f(A(\alpha), A(\beta)) \tag{68}$$

ist, wo f eine beliebige Funktion bedeutet und π eine symmetrische Funktion von der Art, dass auch $\pi(\pi(\alpha, \beta), \gamma)$, $\pi\{\pi(\pi(\alpha, \beta), \gamma), \delta\}$ u.s.w. symmetrisch sind[105]); durch Anwendung der Auflösung der *Abel*'schen Funktionalgleichung (Nr. **22**) findet er, dass diese Operationen sich auf die distributiven zurückführen lassen.

---

101) Grundlagen zu einer Theorie allgemeiner Kofunktionen, Wien 1881; Theorie allgemeiner Kofunktionen, Leipzig 1892.

102) Sui gruppi di operazioni funzionali, Lomb. Rend. 28 (1895), p. 458.

103) Der Begriff „Funktion eines Symbols“ ist hier im allgemeinsten Sinne zu nehmen.

104) Paris C. R. 124 (1897), p. 348; Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 141.

105) *Bourlet* nennt solche Funktionen „indéfiniment symétriques“. Vgl. *Abel*, citate 162).

19. Funktionen von Linien. Die allgemeinste bis jetzt durchgeführte Untersuchung über nicht distributive Funktionaloperationen verdankt man *V. Volterra* [106]). Er betrachtet eine im reellen Intervall $a < x < b$ willkürlich gewählte Funktion von x, z. B. eine willkürliche Linie zwischen den durch $x = a$ und $x = b$ gezogenen Parallelen zur Ordinatenaxe; und eine Zahl z, die für jede dieser Linien einen bestimmten Wert annimmt; man hat dann das, was er eine *Funktion von Linien* nennt. Der Wert von z hängt ab von der *Gesamtheit* der Werte, die die Funktion $y = \varphi(x)$ im gegebenen Intervall nach bestimmtem Gesetz annimmt; mit anderen Worten, diese Zahl ist das Resultat einer gewissen auf $\varphi(x)$ ausgeübten Funktionaloperation, was man durch:

$$z = A(\varphi(x)) \tag{69}$$

ausdrücken kann [107]). Solche Grössen, die von allen Werten einer Funktion in einem gegebenen Intervall abhängen, treten bei verschiedenen Anwendungen der Analysis auf die Physik, sowie in der Variationsrechnung (II A 9) auf.

Allgemeiner kann eine Zahl z abhängen von den Werten einer oder mehrerer Funktionen beliebig vieler Variabeln x und ausserdem noch von einer gewissen Anzahl anderer Variabeln t; das kann man ausdrücken durch:

$$z = A(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots; t_1, t_2, \ldots). \tag{70}$$

Für den Fall (69) entwickelt *Volterra* eine Ausdehnung des Begriffes der *Stetigkeit* auf Funktionen von Linien: z ist stetig, wenn man zu jeder gegebenen positiven Zahl ε eine andere δ so bestimmen kann, dass für jede Variation $\psi(x)$ von $\varphi(x)$, die kleiner als δ ist, die zugehörige Variation von z kleiner als ε ausfällt. Dann definiert er die *Ableitung* von A: Sei $\theta(x)$ in einem in $(a \ldots b)$ enthaltenen Intervall $(m \ldots n)$ überall gleich bezeichnet und kleiner als ε; sei δz die zur Variation θ von φ gehörende Variation von z; sei t_r ein innerer Punkt von $(m \ldots n)$: dann ist die Ableitung von A der Grenzwert, dem das Verhältnis $\delta z : \int_m^n \psi(x)\,dx$ sich gleichmässig nähert, wenn $m \cdots n$ und θ gegen Null konvergieren, was auch die

106) Linc. Rend. (4) 3^2 (1887), p. 97, 141, 153, 225, 274.

107) *Volterra* gebraucht die Bezeichnung:

$$z = z\left[\varphi\overset{a}{\underset{b}{(x)}}\right],$$

um die Abhängigkeit des z von der im Intervall $a < x < b$ genommenen Funktion $\varphi(x)$ anzudeuten.

Funktion φ sei — vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert. Man kann diese Ableitung mit:

$$z' = A'(\varphi;\, t_r) \tag{71}$$

bezeichnen. Indem *Volterra* entsprechend die höheren Ableitungen definiert und für jede die erforderlichen Voraussetzungen hinzufügt, erhält er die Formel:

$$\left\{\begin{aligned} A(\varphi+\psi) = A(\varphi) &+ \int_a^b A'(\varphi;\, t_1)\, \psi(t_1)\, dt_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b A''(\varphi;\, t_1, t_2)\, \psi(t_1)\, \psi(t_2)\, dt_1\, dt_2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\int_a^{b\,(n)} A^{(n)}(\varphi;\, t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \psi(t_1) \ldots \psi(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n + \cdots \end{aligned}\right. \tag{72}$$

Die Terme dieser Entwicklung sind auf ψ angewendete Funktionaloperationen; das erste Integral giebt eine distributive Operation; die folgenden geben Operationen, die sich der Addition gegenüber immer komplizierter verhalten[108]. — *Cornelia Fabbri* dehnt die Formel von *Volterra* auf Grössen aus, die von Funktionen mehrerer Variabeln abhängen[109]. — *C. Arzelà* untersucht die Funktionen von Linien in Hinsicht auf ihre Grenzwerte[110]. *M. Fréchet*[111]) erweitert den Satz von *Weierstrass* über das Maximum (Minimum) einer stetigen reellen Funktion auf stetige Funktionaloperationen.

Funktionalgleichungen.

20. Allgemeines über Funktionalgleichungen. Man nennt *Funktionalgleichungen* diejenigen Gleichungen, die eine Eigenschaft einer oder mehrerer Funktionen ausdrücken und dadurch deren Form mehr oder weniger vollständig zu bestimmen erlauben. Zu ihnen gehören die gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die Gleichungen mit endlichen (gewöhnlichen oder partiellen) und die mit gemischten Differenzen; da diese in besonderen Artikeln behandelt sind, sollen hier nur solche Funktionalgleichungen besprochen werden, die sich nicht unmittelbar auf eine von diesen Klassen zurückführen lassen.

108) *B. Calò*, Lincei Rend. (5) 4 (1895), p. 52.
109) Torino Atti 25 (1890), p. 432.
110) Bologna Mem. (5) 4 (1894).
111) Par. C. R., 21 novembre 1904.

Beispiele von solchen Gleichungen finden sich schon in den Werken von *d'Alembert, Euler* und *Lagrange*; *Monge*[112]) giebt für sie einige allgemeine Prinzipien, sowie Kunstgriffe zur Zurückführung mehrerer Klassen von solchen Gleichungen auf Differenzengleichungen. Erwähnt sei, dass *d'Alembert*[113]) das Problem der Zusammensetzung der Kräfte auf die Auflösung der Funktionalgleichung:

$$\varphi(x+a)+\varphi(x-a)=2\varphi(x)\varphi(a) \tag{73}$$

zurückführt, deren Lösung ist:

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{2}(e^{kx}+e^{-kx}); \tag{74}$$

die speziellen Bedingungen des genannten Problems geben

$$\varphi(x)=\cos x.$$ [114])

Laplace[115]) führt dasselbe Problem auf die Lösung der Gleichung:

$$(\varphi(x))^2+\left(\varphi\left(\frac{a}{2}-x\right)\right)^2=1 \tag{75}$$

zurück, deren Integral ohne Schwierigkeit mit Hilfe einer willkürlichen Funktion $f(x)$ in der Form:

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+f(x)-f\left(\frac{a}{2}-x\right)} \tag{76}$$

enthalten wird. — *Ch. Babbage*[116]), der zahlreiche Beispiele von Funktionalgleichungen giebt, nennt *allgemeine Lösungen* diejenigen, die willkürliche Funktionen, *partikuläre* Lösungen diejenigen, die nur Konstante enthalten. Für mehrere Gleichungen kann man die allgemeine Lösung gewinnen, sobald man eine partikuläre kennt; so ist, wenn $\varphi(x)$ eine partikuläre Lösung der Gleichung $\psi(x)=\psi(ax)$ und f eine willkürliche Funktion ist, $f(\varphi(x))$ die allgemeine Lösung. Entsprechend erhält man die allgemeine Lösung des Systems

$$\psi(x)=\psi(ax)=\psi(bx)=\psi(cx)$$

112) Paris mém. sav. [étr.] 7 (1773), p. 305. In demselben Bande, p. 37, ist auch eine Abhandlung von *Laplace* (Oeuvres 8, p. 5), in der Funktionalgleichungen betrachtet sind, die sich auf gemischte Differential- und Differenzengleichungen zurückführen lassen.

113) Mém. sur les principes de la mécanique, 1769.

114) S. auch *Cauchy,* Anal. algébrique 1, Paris 1821, p. 113.

115) Mécanique céleste 1, Paris 1799 (1807), p. 5 (Oeuvres 1, p. 5). Über die Funktionalgleichung der Zusammensetzung der Kräfte vgl. *F. Siacci,* Napoli Rend. 1899, p. 34; *G. Hamel,* Math. Ann. 60 (1905), p 459.

116) Lond. Phil. Trans. 1815/16; Appendix zu *W. J. Herschel,* Collection of examples on the calculus of finite differences, Cambr. 1820 (ein Auszug von *Gergonne,* Gerg. ann. 12 (1821), p. 73).

in der Form $\psi = f\varphi_2\varphi_1\varphi(x)$, wenn f eine willkürliche Funktion und φ, φ_1, φ_2 bezw. Lösungen der Gleichungen

$$\psi(x) = \psi(ax), \quad \psi\varphi(x) = \psi\varphi(bx), \quad \psi\varphi_1\varphi(x) = \psi\varphi_1\varphi(cx)$$

bedeuten. Ebenso hat man, wenn von der Gleichung:

$$F(x, \varphi(x), \psi(ax), \psi(bx), \ldots) = 0 \tag{77}$$

eine partikuläre Lösung $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots)$ gegeben ist, in der $a_1, a_2, \ldots$ willkürliche Konstante sind, die allgemeine Lösung, indem man

$$\psi(x) = \varphi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots) \tag{78}$$

setzt, unter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ willkürliche Lösungen des Systems

$$\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(bx) = \cdots \tag{79}$$

verstanden.

S. D. Poisson[117]) hat das Problem der Verteilung der statischen Elektrizität auf zwei sich gegenseitig influenzierende Kugeln auf die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x) = A - B\frac{b}{c-x} - \frac{ab}{c^2 - x^2 - cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2 - x^2 - cx}\right),$$

die dann noch vielfach behandelt worden ist[118]), zurückgeführt.

21. Die Gleichung von Babbage und ihre Anwendungen. In Nr. **6** ist mit $S_\psi(\varphi)$ das Resultat der Substitution von $\psi(x)$ an Stelle von x in die willkürliche Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet. Man hat also $S_\psi(x) = \psi(x)$, $S_\psi{}^2(x) = \psi(\psi(x))$ u. s. w. Viele Autoren benutzen die Bezeichnung:

$$x = \psi_0(x),\ \psi(x) = \psi_1(x),\ \psi(\psi(x)) = \psi_2(x),\ \ldots,\ S_\psi{}^n(x) = \psi_n(x); \tag{80}$$

$S_\psi{}^n(x)$ heisst die n^{te} *Iterierte* von $\psi(x)$. Man kann nach Funktionen fragen, deren n^{te} Iterierte wieder die unabhängige Variable selbst ist; man erhält so die Gleichung von *Babbage*[119]):

$$\psi_n(x) = x \quad \text{oder symbolisch} \quad S_\psi{}^n = 1. \tag{81}$$

Z. B. genügen ihr die Funktionen $a - x$, $\frac{x}{ax-1}$ für $n = 2$; $\frac{2}{2-x}$ für $n = 4$; εx für irgend eine positive ganze Zahl n, wenn ε eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Ist φ eine partikuläre Lösung, so ist $f^{-1}\varphi f$ die allgemeine, unter f eine willkürliche Funktion verstanden. *L. Leau*[120]) untersucht die Gleichung von *Babbage* für den Fall, dass

117) Paris Inst. (math.) 1811, p. 43.

118) S. z. B. *Kirchhoff*, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, Leipzig 1891, p. 66.

119) Gerg. ann. 16 (1821), p. 73; vgl. auch *Rausenberger,* Math. Ann. 18 (1881), p. 379 und Periodische Funktionen, Leipz. 1884, p. 162.

120) Par. soc. math. bull. 26 (1898), p. 5.

$\psi(x)$ eine eindeutige analytische Funktion in einem gegebenen Bereich sein soll. Die Gleichung[121]):

$$(82) \qquad F(x, \psi(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) = 0$$

lässt sich soweit reduzieren, dass sie keine Iterierte mehr enthält, indem man successive $\psi = \varphi^{-1} f \varphi$ setzt, wo f willkürlich und $x = \varphi^{-1}(z)$ ist. Diese Gleichung enthält als speziellen Fall die lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(83) \qquad a_0 x + a_1 S_\psi(x) + \cdots + a_n S_\psi{}^n(x) = 0,$$

deren allgemeines Integral sich mit Hilfe des Integrals der Gleichung von *Babbage* leicht ausdrücken lässt[122]).

22. Gleichungen von Abel und von Schroeder. Die Gleichung von *Abel*[123]):

$$(84) \qquad \varphi(\alpha(x)) = \varphi(x) + c \quad \text{oder} \quad S_\alpha \varphi = \varphi + c$$

ist vielfach behandelt worden. Setzt man $x = \psi(y)$, $\alpha(x) = \psi(y+1)$, so gelangt man zu ihrer Lösung mit Hilfe der Differenzengleichung 1. Ordnung $\psi(y+1) = \alpha(\psi(y))$ (deren Lösung übrigens nicht leichter ist); die Funktion φ ist dann gegeben durch die Differenz:

$$\varphi\psi(y+1) - \varphi\psi(y) = c.$$

Abel bemerkt: Kennt man eine partikuläre Lösung $\varphi(x)$ von (84), so ist die allgemeine $\varphi(x) + \omega(x)$, wo $\omega(x)$ in Bezug auf S_α *invariant*, d. h. $S_\alpha(\omega) = \omega$ ist[124]). Als Anwendung löst er die Gleichung $\varphi(x^n) = \varphi(x) + 1$, von der $\varphi(x) = \frac{\log\log x}{\log n}$ eine Lösung ist. Endlich führt er die allgemeinere Gleichung:

$$(85) \qquad F(x, \varphi(\alpha(x)), \varphi(\beta(x))) = 0$$

auf Differenzengleichungen zurück. *A. Korkine*[125]) nimmt bei der Integration der *Abel*'schen Gleichung an, $\alpha(x)$ und $\varphi(x)$ seien in Potenzreihen entwickelbar; er erhält dann formell die Entwicklungskoeffizienten von $\varphi(x)$ durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Indem man $\varphi(x)$ durch $\log\varphi(x)$ ersetzt, erhält man aus der Gleichung (84) die folgende:

$$(86) \qquad \varphi(\alpha(x)) = c\varphi(x) \quad \text{oder} \quad S_\alpha\varphi = c\varphi,$$

121) *Babbage*; Fussnote 116); *O. Spiess*, Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung, Diss., Basel 1902. Vgl. oben, Nr. 9.

122) *Léméray*, Par. C. R. 125 (1897), p. 524; Par. soc. math. bull. 26 (1898), p. 10.

123) Oeuvres 2, p. 36.

124) *Korkine* und *Koenigs*, die dieses Resultat ebenfalls aussprechen, erwähnen nicht, dass es schon von *Abel* gegeben war.

125) Darb. Bull. (2) 6 (1882), p. 235.

die nach *E. Schroeder*[126]) genannt wird; die Bestimmung und der Gültigkeitsbereich der Lösungen von (84) lassen sich aus denjenigen von (86) ableiten. Unter der Voraussetzung, $\alpha(x)$ sei regulär in einem Kreise von einem Radius > 1 um einen Wurzelpunkt z der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$, und es sei ferner:

$$(87) \qquad \sum \frac{1}{n!} \, |\alpha^{(n)}(z)| < 1,$$

beweist *J. Farkas*[127]), dass die Gleichung (86) ein im Kreise vom Radius 1 um z reguläres Integral hat. *Koenigs*[128]) bildet mit Hilfe eines Grenzwertes eine Lösung der Gleichung (86) und beweist ihre Gültigkeit; ihrer Darstellung (Nr. **24**) sind noch einige allgemeine Sätze über Konvergenz der Iteration vorauszuschicken.

23. Iterationsrechnung. Ist $\alpha(x)$ eine gegebene Funktion und bildet man die Iterierten $S_\alpha(x), S_\alpha^2(x), \ldots, S_\alpha^r(x), \ldots$, so entsteht die Frage, ob der Fall eintreten kann, dass diese Folge für $r = \infty$ gegen einen Limes konvergiert, unabhängig von der Art, wie r über alle Grenzen wächst. Dieses Problem hat sich *E. Schroeder*[129]) bei der Untersuchung eines Algorithmus dargeboten, den er *Eggers* zuschreibt und der dazu dient, die Wurzeln algebraischer oder transzendenter Gleichungen mit zunehmender Genauigkeit zu berechnen. Er beweist den fundamentalen Satz: *wenn* S_α^r einen Grenzwert z hat, so ist dieser Grenzwert eine Wurzel der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$. *Farkas*[130]) beweist weiter: Sei $\alpha(x)$ eine analytische Funktion von x, so beschaffen, dass, während x einen Bereich T beschreibt, der entsprechende von $\alpha(x)$ beschriebene Bereich $\alpha(T)$ ganz in T liegt, selbst wenn sich T auf einen Punkt zusammenzieht; dann haben die Iterierten einen von der Art, wie r ins Unendliche wächst, unabhängigen Grenzwert. Ferner[131]): Wenn $\alpha(x)$ für reelle x ebenfalls reell ist und mit x zugleich wächst und wenn dabei für $p < x < q$ auch $p < \alpha(p) < \alpha(x) < \alpha(q) < q$ ist, so haben die Iterierten einen Grenzwert. *Koenigs*[132]) giebt die Umkehrung des Satzes von *Schroeder*, d. h.: Wenn z ein nicht singulärer Punkt von $\alpha(x)$ und $\alpha(z) = z$ sowie $|\alpha'(z)| < 1$ ist, so ist z Mittelpunkt eines Kreises, in dessen Innern

126) Math. Ann. 3 (1871), p. 296.
127) J. de math. (3) 10 (1884), p. 108.
128) Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl. p. 3; 2 (1885), p. 385.
129) Math. Ann. 2 (1870), p. 349.
130) J. de math. (3) 10 (1884), p. 102.
131) Ibid. p. 103.
132) Darb. Bull. (2) 7 (1883), p. 314.

$$\lim_{r=\infty} S_\alpha^{(r)}(x) = z \tag{88}$$

ist. Ist $\varphi(x)$ in z regulär und $\varphi(z) = 0$, so kann man eine so grosse Zahl h angeben, dass $\sum_{n=h}^{\infty} S_\alpha^n(\varphi)$ in diesem Kreis gleichmässig konvergiert und folglich (II B 1, Nr. **6**) in ihm eine reguläre analytische Funktion darstellt[133]). Man hat auch den Fall betrachtet, dass die S_α^r eine endliche Zahl k von Grenzpunkten (Häufungspunkten) haben; sie sind dann Wurzeln von $S_\alpha^k(x) = x$ und werden durch die Substitution S zyklisch vertauscht. Auch dieser Satz lässt sich umkehren[134]).

Wenn $\alpha(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist, hat die Gleichung:

$$\frac{S_\alpha^n(x) - x}{\alpha(x) - x} = 0,$$

solange die Koeffizienten von $\alpha(x)$ unbestimmt bleiben, die Eigenschaft, dass ihre Wurzeln in Systeme von je n zerfallen, in der Weise, dass:

$$x_2 = \alpha(x_1),\ x_3 = \alpha(x_2), \ldots,\ x_n = \alpha(x_{n-1})$$

ist, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln eines Systems sind[135]).

Die Iteration irrationaler Funktionen kann, wie gesagt, zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung dienen, z. B. für die trinomische Gleichung

$$x^n - x - a = 0 \tag{89}$$

die Iteration von $\sqrt[n]{x + a}$; für

$$x^m - px^n + q = 0$$

die von[136]):

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^n}}.$$

E. Netto[137]) untersucht die aus der Iteration von

$$\sqrt[n]{x + a} \tag{90}$$

oder

$$\sqrt[n]{ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + c} \tag{91}$$

133) *G. Koenigs,* Ann. éc. norm. (2) **1** (1884), Suppl. p. **14**.

134) *Koenigs,* Darb. Bull. (2) **7** (1883), p. **314**; *F. Podetti,* Giorn. di mat. **35** (1897), p. **264**.

135) *E. Netto,* Math. Ann. **29** (1887), p. **148**.

136) *K. B. Hoffmann,* Arch. f. Math. **66** (1881), p. **38**.

137) Math. Ann. **29** (1887), p. **141**.

entstehenden Algorithmen und ihre Konvergenz; er bestimmt, welche Wurzeln von (1) durch den Grenzwert der Iteration von (2) geliefert wird, je nach der Wahl des Ausgangswertes x_0. *C. Isenkrahe* bemerkt[138]): wenn man x irgendwie aus der Gleichung

$$x^n - ax^{n-1} - bx^{n-2} - \cdots - c = 0 \tag{92}$$

in der Form:

$$x = \alpha(x)$$

isoliert und dann von irgend einem (reellen oder komplexen) Werte x_0 aus die Iterierten $S_\alpha^{(n)}(x_0)$ bildet, so kann dieser Prozess gegen eine Wurzel ξ von (4) konvergieren, wenn $|\alpha'(\xi)| < 1$ ist; ferner beweist er, dass die Iteration von

$$\frac{\alpha(x) - x\alpha'(x)}{1 - \alpha(x)}$$

gegen eine beliebige Wurzel von (4) konvergieren kann.

Die Iteration der Potenz x^x untersuchen *Eisenstein*[139]) und *Seidel*[140]); die der Funktion $a/\log x$ und überhaupt von Funktionen der Form

$$f\left(\frac{a}{\varphi(x)}\right)$$

A. Sommerfeld[141]).

24. Anwendung der Iterationsrechnung auf die Gleichung von Abel. Sei $\lim\limits_{r=\infty} S_\alpha^{(r)}(x) = z$ in einem Kreise um z, in dem $\alpha(x)$ regulär und $|\alpha'(x)| < 1$ ist; dann ist:

$$B(x) = \lim_{r=\infty} \frac{S_\alpha^{(r)}(x) - z}{(\alpha'(z))^r} \tag{93}$$

eine in der Umgebung von z reguläre analytische Funktion; und wird $\alpha'(z) = a$ gesetzt, so genügt sie der Gleichung von *Schroeder* (Nr. **22**) $S_\alpha \varphi = a\varphi$, die somit gelöst ist[142]). Jede andere in der Umgebung von z reguläre Lösung dieser Gleichung unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor von einer Potenz von $B(x)$. Aus der Lösung der Gleichung von *Schroeder* erhält man die Lösung $\log B(x)$ der Gleichung von *Abel*. Die Funktion $B(x)$ von *Koenigs* kann auch zur Integration anderer Gleichungen dienen[143]), wie $S_\varphi{}^r = S_\alpha$ und

138) Math. Ann. 31 (1888), p. 309; Progr. Trier 1897.

139) J. f. Math. 28, 1844, p. 49.

140) Münch. Abhandl. 11^1 (1872), p. 360.

141) Gött. Nachr. 1898.

142) *Koenigs*, Par. C. R. 99 (1884), p. 1016; Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl. p. 19; 2 (1885), p. 385.

143) Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 385.

$S_\varphi S_\alpha = S_\alpha S_\varphi$, wo α gegeben und φ gesucht ist. *A. Grévy*[144]) beweist die Existenz der Lösung der Gleichung (86) für $\alpha'(z) = 0$, *L. Leau*[145]) für $|\alpha'(z)| = 1$.

25. Andere Anwendungen der Funktionen von Koenigs. Man kann die Funktionen $B(x)$ auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen $F(\varphi) = 0$ anwenden, die bei einer Transformation der Form $x = \lambda(t)$, $\varphi(x) = \psi(t)\mu(t)$ ungeändert bleiben; nur dass t statt x, $\psi(t)$ statt $\varphi(x)$ vorkommt. Eine solche Gleichung hat mindestens ein Integral, das einer Funktionalgleichung von einer der von *Koenigs* untersuchten Formen genügt, und die Integration geschieht mit Hilfe der Funktionen $B(x)$.[146])

Eine andere Anwendung besteht in der Untersuchung der Gleichungen der Form:

$$\pi_0\varphi + \pi_1 S_\alpha\varphi + \pi_2 S_\alpha^2\varphi + \cdots + \pi_n S_\alpha^n\varphi = 0, \tag{94}$$

wenn nach Lösungen $\varphi(x)$ gefragt wird, die in der Umgebung eines Punktes $z = \lim\limits_{r=\infty} S_\alpha^r$ regulär sind. Dieses Problem[147]) bietet Analogien zur Theorie der linearen Differentialgleichungen dar: so ist z. B. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen n Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ eine lineare homogene Relation mit gegenüber S_α invarianten Koeffizienten bestehe, das Verschwinden der zur *Wronski*'schen analogen Determinante[148]):

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ S_\alpha\varphi_1 & S_\alpha\varphi_2 & \ldots & S_\alpha\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\alpha^{n-1}\varphi_1 & S_\alpha^{n-1}\varphi_2 & \ldots & S_\alpha^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}; \tag{95}$$

daraus folgt, dass die Gleichung (94) nur n im angegebenen Sinne linear unabhängige Lösungen haben kann. Die wirkliche Existenz von n solchen Lösungen lässt sich mit Hilfe der Funktionen $B(x)$ durch eine Methode beweisen, die zu der der „fonctions majorantes" in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (II B 7) analog

144) Paris Thèse 1894.

145) Paris Thèse 1897.

146) *P. Appell,* Par. C. R. 7 novembre 1881; Acta math. 15 (1891), p. 281.

147) *A. Grévy,* Ann. éc. norm. (3) 11 (1894), p. 249.

148) Wegen der Verallgemeinerung der *Wronski*'schen Determinante und wegen derjenigen Funktionalgleichungen, deren Theorie Analogien zu der der Differentialgleichungen darbietet, vgl. man *Pincherle,* Linc. Rend. (5) 6^1 (1897), p. 301; *E. Bortolotti*, ibid. 7^1, 1898, p. 45; *Bourlet*, Par. C. R. 124 (1897), p. 1431.

ist[149]). Eine schon erwähnte Untersuchung von *L. Leau*[150]) giebt Existenztheoreme für die regulären Lösungen von Systemen von Funktionalgleichungen, die zu den Systemen linearer Differentialgleichungen analog sind, z. B. das folgende: Seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die unbekannten, α und die β_{ij} gegebene Funktionen; man sucht von dem Gleichungssystem:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} S_\alpha \varphi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{96}$$

die in der Umgebung einer Wurzel der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$ regulären Lösungen und findet für sie Reihenentwicklungen, deren Konvergenz man durch die Bedingungen der „fonctions majorantes" beweist. Derselbe Autor untersucht auch den Fall, dass die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ und α eine beliebige Anzahl von Variabeln enthalten.

26. Analytische Iteration. Die Lösung des Problems der analytischen Iteration, d. h. die Bildung von S_α^r für beliebiges r, lässt sich auf die eben besprochenen Probleme zurückführen. Durch direkte Rechnung ist sie mühsam, selbst in den einfachsten Fällen, wie dem der linearen Funktion[151]):

$$\alpha(x) = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{97}$$ [152])

Eine abgekürzte Methode geben *A. Cayley*[153]), dann *E. Schroeder*[154]) mit Hilfe der der Differenzenrechnung (I E) entlehnten Formel:

$$S_\alpha^r = S^0 + r(S - S^0) + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}(S^2 - 2S + S^0) + \cdots. \tag{98}$$

Das Problem, S_α^r für ein beliebiges (nicht mehr notwendig ganzzahliges) r zu definieren, ist unbestimmt, solange man nicht noch irgend welche weitere Bedingung hinzufügt, z. B. Konvergenzbedingungen, oder dass S^r eine analytische Funktion von r und x sein soll. *E. Schroeder*[155]) bemerkt, dass man die Iterierten einer Funktion β bilden kann, wenn $S_\beta = S_\psi S_\alpha S_\psi^{-1}$ ist und man die von α kennt; diese Bemerkung erlaubt die Iterierten zahlreicher Funktionen

149) *Grévy,* Paris Thèse 1894.

150) Paris Thèse 1897.

151) *E. Hoppe,* Zeitschr. Math. Phys. 5 (1860), p. 136; *J. A. Serret*, J. de math. 15 (1850), p. 156; Cours d'algèbre supérieure.

152) Die Iteration von solchen linearen Funktionen kommen in der Theorie der diskontinuierlichen Gruppen und der automorphen Funktionen häufig vor; so z. B. *F. Klein,* Ikosaeder, Leipzig 1884, passim., *Klein-Fricke,* Modulfunktionen 1, Leipzig 1890, 2. Abschn., Kap. I.

153) Papers 5, p. 466

154) Math. Ann. 2 (1870), p. 317.

155) Ebenda 3 (1871), p. 300.

aus denjenigen der linearen Funktion (97) abzuleiten. Man kann die Iterierten von α auch in dem Falle bilden, dass man eine Funktion ψ kennt, die ein Additionstheorem der Form $\psi(x+c) = \alpha(\psi(x))$ oder ein Multiplikationstheorem der Form $\psi(cx) = \alpha(\psi(x))$ hat. Mit Hilfe dieser Bemerkung führt *Schroeder* das Problem der Iteration auf die Auflösung der Gleichung (84) oder (86) zurück. *C. Formenti*[156]) leitet die Lösung des Problems der Iteration direkt aus der der Gleichung von *Abel* ab. *A. Korkine*[157]) und *J. Farkas*[158]) führen durch andere Methoden die Lösung des Problems der Iteration auf die der genannten Gleichungen zurück. Endlich *C. Bourlet*[159]) nimmt die Formel (98) für beliebiges r in Anspruch und beweist: Wenn $\alpha(x)$ in der Umgebung eines Wurzelpunktes z von $\alpha(x) - x = 0$ regulär und $|\alpha'(z)| < 1$ ist, so giebt diese Formel nicht nur formell, sondern thatsächlich die Entwicklung der Iterierten von $\alpha(x)$ als analytische Funktion von x und r. Iteration von linearen Differentialausdrücken betrachtet *A. Gutzmer*[159b]).

27. Verschiedene Funktionalgleichungen. Verallgemeinerung der Periodizität. Transcendentale Transcendenz.

a) Ausser den bisher besprochenen Funktionalgleichungen sind noch viele andere gelegentlich aufgetreten oder Gegenstand von speziellen Untersuchungen gewesen. So bemerkt *N. H. Abel*[160]): Aus einer nicht kontradiktorischen Gleichung der Form:

$$V(x, y, \varphi(\alpha), f(\beta), F(\gamma), \ldots) = 0, \tag{99}$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegebene Funktionen von x und y sind, lassen sich die unbekannten Funktionen $\varphi, f, F, \ldots$ im allgemeinen alle bestimmen. Als Anwendung bestimmt er φ in der Gleichung:

$$\varphi(\alpha) = V(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)), \tag{100}$$

indem er zuerst x und y durch die Relation $\alpha(x, y) =$ const. verbindet und nach x differentiiert, dann mit $\beta(x, y) =$ const. entsprechend verfährt und so das Problem auf die Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen $\varphi(\gamma)$ und γ zurückführt.

Analog verfährt *H. W. Pexider*[161]) für die allgemeinere Funktionalgleichung

156) Lomb. Rend. (2) 8 (1875), p. 276.

157) Darb. Bull. (2) 6 (1882), p. 228.

158) J. de math. (3) 10 (1884), p. 104.

159) Toulouse Fac. ann. 12 (1898), p. C 1.

159b) Sitzungsber. der Böhm. Gesellschaft, Prag 1902.

160) Magazin for Naturvidenskaberne, Christiania 1823; Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 1, p. 1.

161) Monatsh. Math. 14 (1902), p. 297.

$$F(f_1(x_1),\quad f_2(x_2),\ \cdots,\quad f_n(x_n)) = 0, \tag{101}$$

wo $x_{k+1}, \cdots, x_n$ Funktionen der übrigen reellen oder komplexen unabhängige Variabeln $x_1, \cdots, x_k$ sind. Durch Differentiation von (1) nach den $x_1, \cdots, x_k$ hat man

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} f_i'(x_i) + \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial f_\nu} f_\nu'(x_\nu) \frac{\partial x_\nu}{\partial x_i} = 0, \tag{102}$$

und durch passende Setzungen und unter Bedingungen, die wohl wesentliche Beschränkungen darstellen, kann man $f_{k+1}', f_{k+2}', \ldots, f_n'$ erhalten.

Ein anderes von *Abel*[162]) gestelltes Funktionalproblem ist die Aufsuchung solcher Funktionen f von zwei Variabeln, dass $f(z, f(x, y))$ in x, y, z symmetrisch ist; er findet: jeder solchen Funktion entspricht eine Funktion $\varphi(u)$ von der Art, dass identisch

$$\varphi(f(x, y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist. Diese von *Abel* angegebene Lösung ist die allgemeinste[163]), wenn $f(x, y)$ Ableitungen nach x und y haben soll.

Die Funktionalgleichung:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{103}$$

definiert die Funktion ax, wenn $f(x)$ stetig[164]) sein, oder in jedem endlichen Intervall[165]), oder auch in einer willkürlichen kleinen Umgebung von $x = 0$[166]) eine obere Grenze haben soll, mag sie reell oder komplex sein; aber nicht, wenn ihre obere Schranke in jedem endlichen Intervall unendlich ist[167]).

Cauchy[168]) untersucht auch die einfachen Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) f(y), \\ f(xy) &= f(x) f(y), \\ f(xy) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

und findet, dass die reellen stetigen Funktionen, welche diese Gleichungen befriedigen, durch

---

162) J. f. Math. 1 (1826), p. 1; Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 1, p. 61.

163) *P. Stäckel,* Zeitschr. Math. Phys. 42 (1897), p. 323.

164) *A. Cauchy,* Analyse algébrique, Paris 1821, p. 103 (Oeuvres (2) 3 (1897), p. 98, p. 220).

165) *G. Darboux,* Math. Ann. 17 (1880), p. 55; *C. Segre,* Torino atti 25 (1890), p. 192, 287.

166) *La Vallée-Poussin,* Cours d'analyse, 1903, p. 30.

167) *R. Volpi,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 104; *G. Hamel,* Math. Ann. 60 (1905), p. 459.

168) Vgl. Fussnote 164).

$$f(x) = a^x, \quad x^a, \quad a \log x$$

resp. gegeben sind. *H. W. Pexider*[169]) betrachtet die allgemeineren Funktionalgleichungen

$$f(x) + \varphi(y) = \psi(x + y),$$
$$f(x)\,\varphi(y) = \psi(x + y),$$
$$f(x)\,\varphi(y) = \psi(xy),$$
$$f(x) + \varphi(y) = \psi(xy)$$

und findet, dass man resp. hat

$$f(x) = ax + c, \quad ba^x, \quad bx^a, \quad a \log x + b;$$

und

$$\varphi(x) = ax + c', \quad b'a^x, \quad b'x^a, \quad a \log x + b'.$$

Ähnlich für komplexe stetige Funktionen einer reellen Variablen.

b) Die Funktionalgleichung:

(104) $$\varphi(\alpha(x)) = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad S_\alpha \varphi = \varphi,$$

in der α gegeben ist, kann als *Definition der Periodizität im allgemeinsten Sinne des Wortes* angesehen werden[170]). Periodizität im engeren Sinne erhält man für $\alpha(x) = x + a$, wo a eine Konstante bedeutet; für $\alpha(x) = ax$ erhält man eine Relation, auf die man die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen stützen kann[171]), wie die Verwandlung von x in e^x sofort zeigt. Die Definition der doppelten Periodizität erster, zweiter und dritter Art (II B 3) besteht in nichts anderem als in einem System von zwei einfachen Funktionalgleichungen. Ein System von einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gleichungen der Form:

(105) $$S_\alpha \varphi = \varphi, \quad S_\beta \varphi = \varphi, \quad \ldots$$

führt zu dem Schlusse, dass die Operationen S_α, S_β, ... eine *Gruppe* bilden müssen; sind die Funktionen α, β, ... linear, so kommt man auf die Theorie der gegenüber einer (diskontinuierlichen) Gruppe linearer Substitutionen invarianten Funktionen, d. h. der automorphen (*Fuchs*'schen) Funktionen von *Poincaré* und *Klein* (II B 4). Ihre Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Variabeln, d. h. die

169) Monatshefte für Math. und Phys. 14 (1902), p. 293.

170) *O. Rausenberger,* Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen, Leipz. 1884. Vgl. auch wegen einer Verallgemeinerung der Periodizität, die auch auf mehrdeutige Funktionen ausgedehnt wird, *E. Jaggi,* Nouv. ann. (4) 1 (1901), p. 146, 450, 529.

171) *S. Pincherle,* Giorn. di mat. 18 (1880), p. 92; *Rausenberger,* Lehrbuch, Abschn. VI; *A. R. Forsyth,* Theory of functions, Cambr. 1893, p. 586.

hyperfuchs'schen und hyperabel'schen Funktionen von *E. Picard*[172]), sind ebenfalls durch Funktionalgleichungen definiert. — Die allgemeine Periodizitätsgleichung (104) ist formell allgemein durch die Formel gelöst worden[173]):

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a^n f(x), \tag{106}$$

in der $f(x)$ eine willkürliche, in besonderen Fällen rationale Funktion bedeutet; in der Theorie der einfach und doppelt periodischen, überhaupt der automorphen Funktionen hat man zahlreiche Beispiele dafür, dass durch geeignete Wahl der Funktion $f(x)$ Konvergenz der Reihe erreicht und so eine effektive Lösung der vorgelegten Gleichung gewonnen werden kann.

c) Wichtige Klassen von Funktionen sind definiert durch ein *Additionstheorem*, das seinen Ausdruck in einer Funktionalgleichung findet. Dahin gehören die *Kreisfunktionen*: die Funktion *Cosinus* lässt sich bestimmen durch die Gleichung[114]):

$$\varphi(x+a) + \varphi(x-a) = 2\varphi(x)\varphi(a), \tag{73}$$

mit Hinzufügung einer Nebenbedingung (vgl. Nr. **20**); die Funktion *Sinus* durch[174]):

$$\varphi(2x)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\varphi(x)\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \tag{107}$$

ebenfalls mit Nebenbedingungen; die Partialbruchzerlegung der Funktion *Kotangente* lässt sich ableiten aus ihrer Eigenschaft[175]):

$$\varphi(u)\varphi(v) + \varphi(v)\varphi(w) + \varphi(w)\varphi(u) = \pi^2 \quad \text{für} \quad u+v+w=0. \tag{108}$$

Die für diese Funktion benutzte Methode lässt sich[176]) auch anwenden zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung der *Weierstrass*'schen Funktion $\zeta(x)$, die durch:

$$(\zeta(u)+\zeta(v)+\zeta(w))^2 + \zeta'(u)+\zeta'(v)+\zeta'(w) = 0 \quad \text{für} \quad u+v+w=0 \tag{109}$$

definiert ist. *Weierstrass*[177]) hat seine Vorlesungen über elliptische Funktionen oft mit dem Satze begonnen: Eine analytische Funktion $\varphi(x)$ von der Art, dass:

---

172) Par. C. R. 1884, 1885, 1889; Ann. éc. norm. 1885; J. d. math. 1885; vgl. auch hierüber II B 4.

173) *P. Appell*, Par. C. R. 88 (1879), p 807, 1022.

174) *E. H. Moore*, Ann. of math. 9 (1895).

175) *F. Schottky*, J. f. Math. 110 (1892), p. 324.

176) Ebenda, p. 329.

177) *Weierstrass-Schwarz*, Formeln und Lehrsätze, Berlin 1893, p. 1; vgl. auch *Rausenberger*, Lehrbuch 170, p. 140. — Im übrigen vergleiche man wegen der Additionstheoreme der elliptischen und Abel'schen Funktionen die betr. Artikel von II B 3 und 5.

$$F(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(x+y)) = 0, \tag{110}$$

wo F eine rationale Funktion bezeichnet, ist entweder algebraisch oder periodisch; *H. Petrini*[178]) beweist, dass dieser Satz auch noch gilt, wenn man φ nicht als analytisch, sondern nur als in der Umgebung eines Punktes x_0 eindeutig und stetig voraussetzt.

Funktionalgleichungen können auch zur analytischen Fortsetzung einer zunächst nur in einem begrenzten Bereich definierten analytischen Funktion in einen grösseren Bereich dienen.

Sei noch die Funktionalgleichung erwähnt:

$$\begin{aligned}\varphi(x+x', y+y', \ldots) \\ = \varphi(x, y, \ldots) + \varphi(x', y', \ldots) + f(x, y, \ldots; x', y', \ldots),\end{aligned} \tag{111}$$

in der f gegeben, φ gesucht sei; ihre Lösung wird in der Form erhalten:

$$\varphi(x, y) = c_1 x + c_2 y + \cdots + S, \tag{112}$$

wo S eine Summe von Termen bedeutet, die man erhält, indem man in $f(x, y, \ldots; x', y', \ldots)$ der Reihe nach eine, zwei, ... Variabeln gleich Null setzt[180]).

E. Picard[181]) hat unendlich viele Systeme von m eindeutigen analytischen Funktionen $f, \varphi, \ldots, \psi$ gefunden, die periodisch sind mit der Periode ω, und die Funktionalgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} f(x+\omega') = R_1(f(x), \varphi(x), \ldots, \psi(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(x+\omega') = R_m(f(x), \varphi(x), \ldots, \psi(x)) \end{array}\right. \tag{113}$$

befriedigen; hier ist $\omega : \omega'$ nicht reell, und $R_1, R_2, \ldots, R_m$ definiert eine birationale Substitution über m Buchstaben. Eine geometrische Frage führt später *Picard*[182]) zur Betrachtung des Systems von Funktionalgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} f(ax, by, \ldots, lz) = R_1(f, \varphi, \ldots, \psi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(ax, by, \ldots, lz) = R_m(f, \varphi, \ldots, \psi); \end{array}\right. \tag{114}$$

das System kann durch in der Umgebung von $x = y = \cdots = z = 0$ reguläre und übrigens meromorphe Funktionen befriedigt werden. In beiden Fällen ist die Lösung durch successive Approximationen erhalten.

---

178) Stockh. Forhandl. 1901, p. 297.

179) Vgl. II B 1, Nr. 16.

180) *F. Severi*, Torino Atti 36 (1901), p. 76. *Severi* wendet diese Auflösung auf eine Frage der abzählenden Geometrie an.

181) Par. C. R. 117 (1893), p. 472, 603.

182) Par. C. R. 139 (1904), p. 6.

Endlich sei erwähnt, das *F. Pietzker*[183]) sich mit den allgemeinsten Verbindungen, die assoziativen Charakter haben und mit den sich daraus ergebenden Funktionalgleichungen beschäftigt.

d) Nur hingewiesen sei auf die Funktionalgleichung:

$$(115)\qquad \varphi(x+1)-\varphi(x)=G(x),$$

in der $G(x)$ eine ganze Funktion bedeutet[184]); dann auf die zur Definition der Γ-Funktion analogen Gleichungen:

$$(116)\qquad \varphi(x+1)-r(x)\varphi(x)=s(x),$$

in denen $r(x)$ und $s(x)$ rationale Funktionen bedeuten[185]); denn sie gehören in die Differenzenrechnung. Eine Verallgemeinerung dieser Differenzengleichungen bilden die Gleichungen der Form:

$$(117)\qquad \sum_\nu h_\nu \varphi(x+a_\nu)=f(x),$$

in der f eine gegebene Funktion bezeichnet[186]); sie führen auf lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung (Nr. **14**) und lassen sich mit Hilfe der Transformation von *Laplace* (Nr. **16**) formell, unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ auch effektiv, durch ein bestimmtes Integral lösen. Die h_ν können dabei Konstante oder rationale Funktionen von x sein.

e) *O. Hölder*[187]) hat bewiesen, dass die Γ-Funktion, die die Funktionalgleichung

$$(118)\qquad f(x+1)=xf(x)$$

befriedigt, deswegen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann; sie ist, nach *E. H. Moore*[188]), transcendental-transcendent. Ferner beweist *H. Tietzke*[189]), dass eine analytische Funktion, die eine Funktionalgleichung

$$(119)\qquad f(x)f(x+1)=f(x)+r(x),$$

die keine rationale Lösung hat, und wo $r(x)$ im Unendlich verschwindet, befriedigt, auch transcendental-transcendent ist. *Moore*[188])

183) Beiträge zur Funktionenlehre, Leipzig 1892.

184) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 4 (1887), p. 361; *A. Hurwitz,* Acta math. 20 (1897), p. 285.

185) Namentlich *Hj. Mellin,* Acta math. 3 (1883), p. 322; 8 (1886), p. 37; 25 (1902), p. 139.

186) *G. H. Halphen,* Par. C. R. 93 (1881), p. 781; *S. Pincherle,* Bologna Mem. (4) 5 (1888) (zwei Abhandlungen, die erste betrifft den Fall, dass die Koeffizienten h_ν konstant, die zweite den, dass sie rationale Funktionen von x sind); Rend. del circ. mat. di Palermo 18 (1904), p. 273.

187) Math. Ann. 28 (1886), p. 1.

188) Ibid. 48 (1897), p. 70.

189) Monatsh. Math. 16 (1905), p. 329.

hatte schon ein sehr allgemeines Theorem gegeben über transcendentale Transcendenz analytischer Funktionen, die einer Funktionalgleichung

$$f(G(x)) = Hf(x))$$

genügen, neben Bedingungen für G und H.

28. Integralgleichungen erster Art (Umkehrung der bestimmten Integrale); Allgemeines. Das Problem der *Umkehrung der bestimmten Integrale* hat zum Gegenstand die Auflösung der Funktionalgleichung [190])

$$\int_{(l)} \alpha(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{120}$$

nach der unbekannten Funktion $\varphi(y)$; $f(x)$ ist eine gegebene Funktion, ebenso $\alpha(x, y)$; die letztere heisst *charakteristische Funktion* oder *Kern.* Diese Funktionen können analytisch sein oder nicht; die Integrationsgrenzen können reell sein oder l kann eine offene oder geschlossene, endliche oder unendliche Linie in der Ebene der Variabeln y bedeuten. Die Wichtigkeit des Problems (120) liegt einmal in seinen zahlreichen Anwendungen in der mathematischen Physik, dann darin, dass es äquivalent ist mit dem Problem der Entwicklung der gegebenen Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach gegebenen Funktionen $\varpi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die charakteristische Funktion muss dann so gewählt werden, dass sie längs des Integrationsweges l eine gleichmässig konvergente Entwicklung

$$\alpha(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(y)\, \varpi_n(x) \tag{121}$$

zulässt, und die Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ ist mit der Bestimmung der Funktion $\varphi(y)$ äquivalent [191]).

Die Formel (120) ist eine Funktionalgleichung im engeren Sinne des Wortes, wenn $f(x)$ eine gegebene Funktion ist; ist f innerhalb eines gewissen Funktionalbereiches willkürlich, so ist diese Formel die Definition der zu:

$$A(\varphi) = \int_{(l)} \alpha(x, y)\, \varphi(y)\, dy \tag{46}$$

inversen Operation A^{-1}. Für diese Auffassung fällt das Problem der Umkehrung der bestimmten Integrale zusammen mit dem der Auf-

---

190) Für die Gleichung (**112**) hat *I. Fredholm* den Namen „*Abel'sche Funktionalgleichung*" vorgeschlagen, *D. Hilbert* nennt sie „*Integralgleichung erster Art*". Der Name Integralgleichung geht auf *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 103 (1888), p. 228, zurück.

191) *U. Dini,* Ann. univ. Tosc. 17 (1880).

suchung der Inversen einer distributiven Operation, die in der Gestalt eines bestimmten Integrals gegeben ist (Nr. **15**). Das so formulierte Problem zerfällt in zwei: einmal handelt es sich um die formelle Bestimmung des Ausdrucks der Operation A^{-1}, im allgemeinen ebenfalls in der Gestalt eines bestimmten Integrals — was mit der Bestimmung von dessen charakteristischer Funktion äquivalent ist; dann muss festgestellt werden, in welchem Funktionalbereich für $f(x)$ diese Operation A^{-1} Bedeutung hat. Die Frage kommt so zurück auf die Bestimmung einer Funktion $\beta(y, t)$ und eines Integrationsweges l' von der Art, dass in einem passend gewählten Funktionalbereich für $f(x)$ die Gleichung gilt:

$$\int\limits_{(l)}\int\limits_{(l')} \alpha(x,y)\,\beta(y,t)\,f(t)\,dt\,dy = f(x). \tag{122}$$

Hat man mit analytischen Funktionen zu thun und sind die Voraussetzungen der *Cauchy*'schen Integralformel (II B 1, Nr. **4**) erfüllt, so reduziert sich das Problem noch auf die Bestimmung einer Funktion β von der Art, dass die Gleichung gilt:

$$\int\limits_{(l)} \alpha(x,y)\,\beta(y,t)\,dy = \frac{1}{t-x}. \tag{123}$$

Endlich kann man noch zwei Fälle des Problems (120) unterscheiden, je nachdem der Integrationsweg fest, d. h. von x unabhängig ist (Nr. **29**) oder nicht (Nr. **30**).

29. Umkehrung bestimmter Integrale mit festen Grenzen. Für den Fall fester Grenzen ist das Problem (120) oder was dasselbe ist, das der Bestimmung der Funktionen $\beta(y, t)$ im allgemeinen nicht gelöst; doch kennt man die Lösung für eine Anzahl spezieller Fälle. Zunächst den Fall $\alpha(x, y) = e^{xy}$, den *N. H. Abel*[192]) behandelt hat; er findet, dass in besondern Fällen die Umkehrung durch ein Integral derselben Form geschieht[193]):

$$\varphi(y) = \int e^{-xy} f(x)\,dx.$$

Das *Fourier'sche Integral*[194]) giebt dieselbe Umkehrung in der Gestalt (122). Das Inversionsproblem lässt sich auch in dem Falle

---

192) Oeuvres 2, p. 69.

193) Das ist ein anderer Ausdruck für die in Nr. **16** schon zitierte Bemerkung, dass die Umkehrung einer *Laplace*'schen Transformation wieder eine *Laplace*'sche Transformation ist.

194) *J. Fourier,* Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, Nr. 342, p. 533; Nr. 360, p. 546 (Oeuvres 1, p. 387, 406); *C. Jordan,* Cours d'analyse 2, Paris 1894, p. 235. Für komplexe Variable vgl. *L. Kronecker,* Vorlesungen über Integrale, herausg. von *E. Netto,* Leipz. 1894, p. 222.

lösen, dass die charakteristische Funktion y^{-x} ist. Dieser Fall, der übrigens von dem eben besprochenen sich nur durch Einführung einer neuen Variabeln unterscheidet[195]), ist für reelle Variabeln implicite von *P. S. de Laplace*[196]), für komplexe von *B. Riemann*[197]) behandelt worden; letzterer giebt als Lösung von:

$$(124)\qquad f(x) = \int_0^\infty \varphi(y)\, y^{-x-1} dy$$

den Ausdruck:

$$(125)\qquad 2\pi i \varphi(y) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x)\, y^x dx.$$

Dieselbe Umkehrung findet sich schon bei *R. Murphy*[198]), mit Anwendungen auf Fragen der mathematischen Physik, und später bei *J. C. Kluyver* und *N. Nielsen*[88]), die sie auf die Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine nach Faktoriellen fortschreitende Reihe anwenden.

Einen speziellen Fall, der sich mit Hilfe elementarer Funktionen erledigen lässt, behandelt *H. Laurent*[199]), nämlich die Auflösung des Gleichungssystems:

$$(126)\qquad \int_a^b \varphi(y)\, y^k dy = g_k$$

für den Fall, dass man dem k nur eine endliche Zahl von Werten $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ beilegt. Dagegen bietet dieses Problem grosse Schwierigkeiten, aber auch viel mehr Interesse, wenn k die Werte $0, 1, 2, \ldots, \infty$ durchläuft; es ist im allgemeinen nicht gelöst, aber wichtige Spezialfälle sind behandelt. Z. B. wenn $a = 0$, $b = \infty$ und die Zahlen g_h alle positiv sind, ist die Funktion $\varphi(y)$ eindeutig bestimmt, wenn die aus den g_h durch die Gleichungen:

$$(127)\qquad a_n' = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1} & g_{n-2} & \cdots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad b_n = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$(128)\qquad a_{2n} = \frac{a_n'^2}{b_n b_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{b_n^2}{a_n' a_{n+1}'}$$

abgeleiteten Zahlen a_n positiv und so beschaffen sind, dass die Reihe

195) Es handelt sich dann um die in Nr. **16** mit B bezeichnete Operation.

196) Vgl. Fussnote 74).

197) Über die Anzahl der Primzahlen, usw., Werke 1876, p. 140.

198) Cambr. Trans. 4 (1833), p. 358.

199) J. de math. (3) 4 (1878), p. 225.

$\sum a_n$ divergiert. Diese Theorie (*Problème des moments*), die man *Stieltjes*[200]) verdankt, ist neuerdings von *E. Borel*[201]) wieder aufgenommen und verallgemeinert worden.

Andere Fälle, in welchen das Problem (120) sich lösen lässt, sind von *S. Pincherle*[202]) behandelt worden. Zunächst der, dass $\alpha(x, y)$ eine Funktion der Differenz $y - x$ ist; in diesem Fall ist die Operation A mit der Differentiation vertauschbar, und dasselbe gilt also auch von der inversen Operation A^{-1}, mit anderen Worten, $\beta(y, t)$ ist ebenfalls eine Funktion der Differenz $y - t$, und diese Funktion lässt sich bestimmen. In diesem Falle fällt das Problem (120) zusammen mit dem der Entwicklung von $f(x)$ nach den Ableitungen einer und derselben Funktion oder nach *Appell*'schen Polynomen (Nr. **17** b), je nachdem $\alpha(x, y)$ nach fallenden oder steigenden Potenzen von $y - x$ geordnet ist.

Dann der Fall[203]), dass die charakteristische Funktion einer Gleichung der Form genügt:

$$(129)\quad (a_m + b_m x)\frac{\partial^m \alpha}{\partial y^m} + (a_{m-1} + b_{m-1} x)\frac{\partial^{m-1}\alpha}{\partial y^{m-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x)\,\alpha = 0,$$

in der $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ gegebene Funktionen von y bedeuten. In diesem Falle wird die Funktion $\beta(y, t)$ der Operation A^{-1} folgendermassen erhalten: man multipliziere in (129) beiderseits mit $\sigma(t, y)$ und integriere längs l; integriert man partiell, bestimmt σ als ein Integral der Gleichung:

$$(130)\qquad \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial y^k}\{(a_k + b_k t)\,\sigma(t, y)\} = k(t)$$

und wählt $k(t)$ und die in σ noch willkürlichen Grössen so, dass die vor das Integralzeichen getretenen Bestandteile sich wegheben, so erhält man durch Subtraktion von (129) und (130) den Ausdruck (123) von $(t - x)^{-1}$. Damit ist das Problem gelöst, zugleich auch das der Entwicklung einer gegebenen Funktion nach Polynomen $\varpi_n(x)$, die einer linearen Rekursionsformel mit in x linearen Koeffizienten genügen; und aus den Eigenschaften der Integrale von (129) ergiebt sich der Gültigkeitsbereich dieser Lösung. Als Spezialfall erhält man

---

200) Toulouse Fac. ann. 8 (1894), p. 793; 9 (1895), p. A 24.

201) Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901, p. 61.

202) Acta math. 10 (1887), p. 153; Bologna Mem. (4) 7 (1886).

203) Ibid. 16 (1892), p. 341; Math. papers of the intern. Congress, Chicago 1896, p. 278.

die Konvergenzbedingungen der von *E. Heine*[204]) gegebenen Entwicklung einer analytischen Funktion nach *Legendre*'schen Polynomen.

Endlich ist das Problem (120) auch noch gelöst[205]) in dem Falle, dass die charakteristische Funktion einer partiellen Differentialgleichung der Form genügt:

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{a_k(x)\frac{\partial^k\alpha}{\partial x^k}+b_k(y)\frac{\partial^k\alpha}{\partial y^k}\right\}=0. \tag{131}$$

30. Umkehrung bestimmter Integrale mit veränderlichen Grenzen. Der Fall des Problems (120), dass mindestens eine der Integrationsgrenzen mit x veränderlich ist, hat sich zuerst *N. H. Abel*[206]) bei der Lösung einer Aufgabe über brachistochrone Bewegung dargeboten: er erhält die Umkehrung des Integrals:

$$f(x)=\int_0^x\frac{\varphi'(y)\,dy}{(y-x)^n},\qquad (n<1) \tag{132}$$

durch die Formel:

$$\varphi(y)=\frac{\sin n\pi}{\pi}\,y^n\int_0^1\frac{f(ty)\,dt}{(t-1)^n}. \tag{133}$$

Zahlreiche Autoren, von *J. Liouville*[35]) bis *E. Beltrami*[207]), haben sich mit dieser Inversion beschäftigt und davon Anwendungen auf Fragen der mathematischen Physik und auf die Koeffizientenbestimmung der Entwicklung einer Funktion nach *Bessel*'schen und anderen Funktionen[208]) gegeben.

Ein allgemeinerer Fall ist von *N. Sonine*[209]) behandelt worden, nämlich der, dass die charakteristische Funktion von der Form

204) Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Berlin 1878; vgl. II B 1, Nr. 38.

205) *T. Levi-Civita,* Lomb. Rend. (2) 28 (1895), p. 533.

206) J. f. Math. 1 (1826), p. 153 (Oeuvres 1, p. 97 (vgl. auch p. 11)). *Abel* hatte die Formel schon 1823 gegeben; er war allem Anschein nach im Besitz der Lösung des Problems auch für den allgemeinen Fall. Vgl. die Bibliographie des Problems in der historischen Einleitung der Abhandlung von *V. Volterra,* Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139.

207) Lomb. Rend. (2) 13 (1880), p. 327; Bologna Mem. (4) 1 (1879); 4 (1882); s. auch *E. Cesàro,* Bulletin de l'Acad. de Belgique 1902. In derselben Arbeitsrichtung liegt auch die Untersuchung von *E. Cesàro* über ein Problem der Wärmeleitung, Brux. Bull. 1902, p. 387.

208) *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 2 (1857), p. 156; *Beltrami*[207]); *Dini*[191]).

209) Acta math. 4 (1884), p. 171.

$\alpha(x-y)$ ist; hier, wie für die Umkehrung der Integrale mit festen Grenzen (Nr. **29**) ist die charakteristische Funktion der inversen Operation von derselben Form. *Sonine* beschränkt sich dabei auf analytische Funktionen; die Ausdehnung seiner Lösung auf nicht analytische Funktionen giebt *T. Levi-Civita*[210]).

Für den allgemeinen Fall ganz beliebiger charakteristischer Funktionen, die nur endlich und integrabel sein und eine integrable Ableitung nach x haben müssen, ist das Problem von *V. Volterra* gelöst worden[211]); die Lösung beruht auf dem folgenden Prinzip: Ist $\sigma_0(x, y)$ eine endliche und integrable Funktion und berechnet man

$$(134) \quad \sigma_i(x, y) = \int_x^y \sigma_{i-j}(x, t)\, \sigma_{j-1}(t, y)\, dt, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots; \\ j = 1, 2, \ldots, i \end{pmatrix}$$

so ist σ_i vom Index j unabhängig, und die Reihe:

$$(135) \qquad s_0(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(x, y)$$

konvergiert gleichmässig und stellt eine integrable Funktion dar; verfährt man mit s_0 ebenso wie zuerst mit σ_0, so kommt man auf die ursprüngliche Funktion σ_0 zurück. Mit Hilfe dieses Prinzips erhält *Volterra* die Formel für die Lösung der Funktionalgleichung

$$(136) \qquad f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(y)\, \alpha(x, y)\, dy,$$

wenn $\alpha(x, y)$ für $x = y$ nicht null ist; und diese Lösung ist eindeutig bestimmt. Wenn $\alpha(x, y) = 0$ ist für $x = y$, lässt sich das Problem ebenfalls lösen, aber es kann dann unendlich viele Lösungen geben[212]). *E. Holmgren*[213]) zeigt, dass diese Lösungen eine lineare Mannigfaltigkeit bilden; was mit den Prinzipien der Umkehrung einer distributiven Operation (Nr. **5**) in Übereinstimmung ist. —

210) Torino Atti 31 (1895), p. 25.

211) Linc. Transunti (3) 8 (1884), p. 315; Rend. (5) 5 (1896), p. 177; Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429; Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139. Der Verfasser erläutert die Möglichkeit der Lösung des Problems für diesen Fall durch die Analogie mit einem System linearer Gleichungen, in dem alle Elemente der Determinante auf der einen Seite der Hauptdiagonale null sind. Dadurch tritt eine Vereinfachung ein, die im Falle der Umkehrung bestimmter Integrale mit *festen* Grenzen (Nr. **29**) nicht statt hat; wie weit in diesem Falle die Beziehung zwischen der Theorie der distributiven Operationen und der der unendlichen Determinanten (I A 3, Nr. **58**) reicht, ist in Nr. **31** d) klargestellt.

212) Torino Atti 31 (1896), p. 389.

213) Ebenda 35 (1900), p. 392.

Volterra hat seine Methode auch auf Fälle angewendet, in welchen beide Grenzen des Integrals mit x veränderlich sind[214]); z. B. erhält er die Lösung der Gleichung:

$$(137)\qquad f(x) - f(0) = \int_{ax}^{x} \varphi(y)\,\alpha(x,y)\,dy, \qquad (a > x > 0).$$

Ausserdem giebt er die Lösung des Gleichungssystems[215]):

$$(138)\quad f_i(x) - f_i(a) = \int_a^x \sum_{h=1}^{n} \varphi_h(y)\,\alpha_{ih}(x,y)\,dy, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für den Fall, dass die Determinante $|\alpha_{ih}(x,y)|$ von Null verschieden ist.

31. Integralgleichungen zweiter Art.

a) Ein besonderes Interesse knüpft sich neuerdings an die Gleichungen der Form:

$$(139)\qquad \varphi(x) - k\int_{(l)} \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x),$$

die *D. Hilbert*[216]) Integralgleichungen zweiter Art nennt[217]), da sich Lösungen von Randwertaufgaben der mathematischen Physik auf sie zurückführen lassen. Diesen Zusammenhang hat *C. Neumann*[218]) bei Gelegenheit eines Problems betreffend das Potential einer Doppelschicht bemerkt, auf das dann *H. Poincaré*[219]) das „*Dirichlet*'sche Problem" zurückgeführt hat. *Neumann*'s Lösung einer Gleichung der Form (139) lässt sich symbolisch folgendermassen darstellen: Schreibt man die Gleichung:

$$(140)\qquad \varphi - kA(\varphi) = f,$$

so ist diese Lösung formal gegeben durch

214) Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 156.

215) Rend. Lincei (5) 5 (1896), p. 177.

216) Gött. Nachr. 1904, p. 49.

217) Die Lösung der Gleichung (120) scheint viel schwieriger zu sein, als die der Gleichung (139); die Bemerkung *Fredholm*'s, dass die erstere aus der letzteren erhalten werden könne, indem man nur $k = \infty$ zu setzen brauche, hat keinen praktischen Wert, da die letztere im allgemeinen eine „meromorphe" Funktion von k ist und also für $k = \infty$ eine wesentliche Singularität aufweist. — Übrigens beziehen sich die folgenden Angaben hauptsächlich auf den Fall reeller x und t, die dann unbeschadet der Allgemeinheit auf das Intervall $(0 \ldots 1)$ beschränkt werden können.

218) Leipz. Ber. 1870; Untersuchungen über das logarithmische u. *Newton*'sche Potential, Leipzig 1877, Kap. 5; Leipz. Abhandl. 13 (1887), p. 707.

219) Palermo Rend. 8 (1894), p. 57; Acta math. 20 (1897), p. 59—142.

$$(141) \qquad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f);$$

und wenn diese Reihe für geeignete Werte von k konvergiert, so giebt sie für diese Werte die Lösung von (139). Aber im allgemeinen findet Konvergenz nur für hinlänglich kleine k statt: *Poincaré*[220]) hat erst vorhergesehen, und *Fredholm* bewiesen, dass die Lösung von (139) eine *meromorphe* Funktion von k — Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen — ist.

b) In einigen speziellen Fällen konvergiert allerdings die Reihe (141) für alle k und stellt also eine ganze Funktion von k vor: insbesondere, in dem Fall, wo die Variabeln reell sind und die Integrationsgrenzen in (139) von x abhängen. Dieser Fall lässt sich zurückführen auf die Lösung der Gleichung:

$$(142) \qquad \varphi(x) - k\int_0^x \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x), \qquad (0 \leqq x \leqq 1);$$

sie ist zuerst von *J. Le Roux*[221]) mit Hilfe der Methode der successiven Approximationen gelöst und fast gleichzeitig von *V. Volterra*[222]) — auch für den Fall, dass $\alpha(x, t)$ Singularitäten aufweist — diskutiert worden, der durch seine Untersuchungen über die Verallgemeinerung des *Abel*'schen Problems (Nr. **30**) auf sie geführt worden war. Bei *Volterra* tritt die Wichtigkeit der Funktion

$$(143) \qquad h(x) = \alpha(x, x)$$

hervor, die hier dieselbe Rolle spielt, wie die Determinante bei Systemen linearer Gleichungen; er zeigt, dass es nur eine Lösung giebt, wenn $h(x)$ im Integrationsintervall von Null verschieden ist, und dass die Lösungen, wenn $h(x)$ Null wird, von einer algebraischen Gleichung abhängen. Über die letztere fügt dann *E. Holmgren*[223]) noch einige Bemerkungen bei. Die Lösung von (142) durch successive Approximationen ist von *E. Picard*[224]) noch einfacher dargestellt worden; mit derselben Methode und mit Gebrauch von Hülfsfunktionen, die Integrale der linearen Differentialgleichung

$$f'(t) = \alpha(x, t)\,\varphi(t) + \cdots + \alpha_m(x, t)\,\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}$$

sind, löst *P. Burgatti*[225]) die allgemeinere Gleichung:

220 Acta Math. 20 (1897), p. 118 u. f.

221) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), p. 244.

222) Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429; Linc. Rend. (5) 5 (1896), p. 177; Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139. Vgl. übrigens Nr. **30**.

223) Torino Atti 35 (1900), p. 384.

224) Paris C. R. 139 (1904), p. 245.

225) Linc. Rend. (5) 12 (1903), p. 443, 596.

$$(144)\quad f(x) = \varphi(x) + \int_a^x \left(\alpha(x,t)\,\varphi(t) + \alpha_1(x,t)\frac{d\varphi}{dt} + \cdots + a_m(x,t)\frac{d^m\varphi}{dt^m}\right) dt$$

nach der unbekannten Funktion φ auf; *G. Fubini*[226]) löst dieselbe Gleichung mit einer anderen Methode, die sich auf die allgemeine Theorie der distributiven Operationen gründet.

c) Sind die Grenzen des Integrals von x unabhängig, so lässt sich für reelle Variable die Gleichung (139) auf die Form bringen:

$$(145)\qquad \varphi(x) - k\int_0^1 \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x);$$

die Funktionen $f(x)$ und $\alpha(x,t)$ sollen dabei im Intervall $(0\ldots 1)$ reell, endlich und stetig sein[227]). Auf Grund der Bemerkung, dass die meromorphe Lösung dieser Gleichung Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen ist, gelingt es *I. Fredholm*[228]) diese Transzendenten direkt zu erhalten. Er giebt die Lösung, wenn $\alpha(x,t)(x-t)^\nu$ für ein $\nu < 1$ endlich und integrabel ist, in der Form:

$$(146)\qquad \varphi(x) = f(x) + k\int_0^1 \frac{\Delta(k,x,t)}{\delta(k)} f(t)\,dt;$$

dabei ist:

$$(147)\qquad \delta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n}{n!} \int_0^1 \!\!\overset{(n)}{\cdots}\!\! \int \alpha\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n,$$

$$(148)\quad \Delta(k,x,t) = \alpha(x,t) - k\int_0^1 \alpha\begin{pmatrix} x\,t_1 \\ t\,t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \frac{k^2}{1\cdot 2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha\begin{pmatrix} x\,t_1\,t_2 \\ t\,t_1\,t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2 + \cdots,$$

und:

$$(149)\qquad \alpha\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha(x_1,t_1) & \alpha(x_1,t_2) & \ldots & \alpha(x_1,t_n) \\ \alpha(x_2,t_1) & \alpha(x_2,t_2) & \ldots & \alpha(x_2,t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(x_n,t_1) & \alpha(x_n,t_2) & \ldots & \alpha(x_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

Der Nenner $\delta(k)$, der hier die Rolle der Determinante bei Systemen linearer Gleichungen spielt, ist von der Funktion $f(x)$ unabhängig. Die Konvergenz der Reihen für $\delta(k)$ und $\Delta(k,x,t)$ wird auf Grund

226) Acc. Napoli Rend. febbraio 1904.

227) *Fredholm* bemerkt Acta math. 27 (1903), p. 366, dass man die Gleichung (142) als speziellen Fall von (145) ansehen könne; man brauche nur anzunehmen, dass $\alpha(x,t)$ für $t > x$ gleich Null sei.

228) Stockh. Öfvers. 57 (1900), p. 39; Par. C. R. 134 (1902), p. 1561; Acta math. 27 (1903), p. 365.

eines Lemmas von *J. Hadamard*[229]) bewiesen. Für Werte von k, für die $\delta(k) \neq 0$ ist, giebt es nur diese eine Lösung; für eine m-fache Wurzel $\bar{k}$ von $k = 0$ giebt es unendlich viele Lösungen, die sich linear aus m von ihnen ableiten. Sie lassen sich durch Quotienten von Reihen darstellen, die zu $\Delta(k, x, t)$ analog sind und von *Fredholm* als *Minoren* von $\delta(k)$ bezeichnet werden. — *G. Fubini*[230]) bedient sich der Methode von *Fredholm* zur Lösung von Funktionalgleichungen der Form (144), in denen die Grenzen der Quadratur von x unabhängig sind.

Im komplexen Gebiet treten ganz andere Verhältnisse ein; in der That geht aus Bemerkungen von *S. Pincherle*[231]) hervor, dass in manchen Fällen die Gleichung

$$\varphi(x) = k \int_{(c)} \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{150}$$

für jeden Wert von k eine Lösung, und also die entsprechende Gleichung (139) für jeden Wert von k eine unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Lösungen haben kann.

d) *Fredholm*'s Methode hat ihre Wurzel in einem elementaren algebraischen Problem[232]). *O. D. Kellogg*[233]) teilt auf Anregung von *D. Hilbert* das Intervall von 0 bis 1 in n gleiche Teile, substituiert $f\left(\frac{h}{n}\right)$ für $f(x)$, $\varphi\left(\frac{i}{n}\right)$ für $\varphi(\alpha)$, $\alpha\left(\frac{h}{n}, \frac{i}{n}\right)$ für $\alpha(x, t)$ und ersetzt das Integral durch eine endliche Summe. So erhält er ein gewöhnliches System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, das sich durch Determinanten lösen lässt: der Übergang zu $n = \infty$ lässt die Form der *Fredholm*'schen Lösung augenfällig werden. Die strenge Durchführung des Grenzüberganges von dem algebraischen zum transzendenten Problem giebt *Hilbert* selbst[234]), speziell für den besonders interessanten Fall, dass die Funktion $\alpha(x, t)$, die er Kern nennt, in x und t symmetrisch ist. Mit Hilfe des Grenzüberganges und nach vorgängigem Beweis der Konvergenz der Entwicklungen $\delta(k)$ und $\Delta(k, x, t)$ erhält er die Formel (146).

Das in der Gleichung (139) enthaltene Problem — $\alpha(x, t)$ symmetrisch — lässt sich auch als transzendente Verallgemeinerung des

---

229) Darb. Bull. (2) 17 1893, p. 240.

230) Catania Accad. Gioenia boll. 1905, fasc. 83.

231) Math. Ann. 49 (1897), p. 325.

232) Er sagt (Par. C. R., 27 janvier 1902): „la théorie de l'équation (139) est un cas limite de la théorie des équations linéaires". Dasselbe hatte *Volterra*, Torino Atti 31 (1896), p. 235 für den Fall b) schon bemerkt; vgl. Fussnote 211)

233) Diss. Gött. 1902.

234) Gött. Nachr. 1904, p. 57.

Problems der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten (I B 2, Nr. **3**) ansehen[235]). Für diesen Gesichtspunkt haben fundamentale Wichtigkeit die (nach steigendem absoluten Betrag geordneten) Wurzeln $k_1, k_2, \ldots$ der Gleichung $\delta(x) = 0$; *Hilbert* nennt sie *„die zum Kern $\alpha(x, t)$ gehörigen Eigenwerte"*. Jeder einfachen Wurzel k_i entspricht eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung der Funktionalgleichung:

$$\varphi(x) = k \int_0^1 \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{150}$$

jeder m-fachen Wurzel m linear-unabhängige Lösungen, *„die zu dem Eigenwerte k_i gehörigen Eigenfunktionen"*. In der allgemeinen Theorie der distributiven Operationen nach *Pincherle* erscheinen diese Eigenfunktionen als *Invarianten*[236]) der durch die Quadratur gegebenen Operation $A(\varphi)$. Ist der Kern symmetrisch, so sind die Eigenwerte alle reell[237]); zu jedem Kern existiert mindestens ein Eigenwert und folglich auch mindestens eine Eigenfunktion[238]). Durch geeignete Wahl des noch willkürlichen konstanten Faktors, bezw. durch geeignete Auswahl unter den zu einem mehrfachen Eigenwert gehörenden lassen sich die Eigenfunktionen „normieren"; bezeichnet man dann mit $\psi_i(x)$ die i^{te} normierte Eigenfunktion, so gelten die Relationen:

$$\int_0^1 \psi_i(x)\, \psi_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \gtrless j, \\ 1 & \;\;\text{„}\;\; i = j. \end{cases} \tag{151}$$

Damit gelangt man zu *Hilbert*'s fundamentaler Formel[239]):

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x,t)\, p(x)\, q(t)\, dx\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \int_0^1 \psi(x)\, p(x)\, dx \int_0^1 \psi(x)\, q(x)\, dx, \tag{152}$$

in der $p(x)$, $q(x)$ beliebige stetige Funktionen bedeuten können; die Reihe rechts konvergiert unbedingt und gleichmässig für alle Funktionen $p(x)$, $q(x)$, für die die Integrale:

$$\int_0^1 p^2(x)\, dx, \quad \int_0^1 q^2(x)\, dx \tag{153}$$

eine endliche Grenze nicht überschreiten. Für $p(x) = q(x)$ erhält man die transzendente Verallgemeinerung der erwähnten Transformation der quadratischen Formen.

235) Ebenda, p. 62.
236) Vgl. *Pincherle* e *Amaldi*, p. 35.
237) *Hilbert*, Gött. Nachr. **1904**, p. **63**.
238) „Fundamentaltheorem" nach *E. Schmidt*, Diss. Gött. **1905**.
239) Gött. Nachr. **1904**, p. 70.

Die Zahl der Wurzeln von $\delta(k)$ ist im allgemeinen unendlich[240]); sie ist dann und nur dann gleich einer endlichen Zahl m, wenn der Kern von der Form ist:

$$\alpha(x, t) = \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\, \chi_n(t). \tag{154}$$

Die Bedingungen dafür, dass eine Funktion von zwei Variabeln sich auf diese Form bringen lässt, giebt *K. Stephanos*[241]). Für einen symmetrischen Kern ist $\varphi_n(x) = \chi_n(x)$.

Die zu einem Kern $\alpha(x, t)$ gehörigen Eigenfunktionen sind zugleich auch Eigenfunktionen der „iterierten Kerne“[242]):

$$\alpha_\nu(x, t) = \int_0^1 \alpha(x, u)\, \alpha_{\nu-1}(u, t)\, du \qquad [\alpha_1(x, t) = \alpha(x, t)]. \tag{155}$$

e) Die Eigenschaften (151) der „normierten Eigenfunktionen“ führen zur Entwicklung einer im Intervall $(0 \ldots 1)$ willkürlich gegebenen stetigen Funktion in eine nach solchen Funktionen fortschreitende Reihe[243]). Will man bei solchen Entwicklungen auch den Fall mehrfacher Wurzeln von $\delta(k)$ mit einbeziehen, so ist es zweckmässig, ein „*vollständiges normiertes* Orthogonalsystem des Kernes $\alpha(x, t)$“[244]) einzuführen, d. h. ein System von Eigenfunktionen, die die Relationen (151) erfüllen und dabei so gewählt sind, dass jede beliebige Eigenfunktion sich linear, homogen und mit konstanten Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Funktionen des Systems ausdrücken lässt. „Sei dann $f(x)$ eine stetige Funktion, die sich auf die Form bringen lässt:

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(x, t)\, p(t)\, dt, \tag{156}$$

in der $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet; jede solche Funktion lässt sich entwickeln in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe der Form:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x), \quad c_\nu = \int_0^1 \psi_\nu(t) f(t)\, dt, \tag{157}$$

wenn $\psi_1, \psi_2, \ldots$ die Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems sind.“ Dieser Satz rührt von *Hilbert*[245]) her; eine

240) Ebenda, p. 72.
241) Palermo Rend. 18 (1904), p. 360.
242) *E. Schmidt*, Diss. Gött. § 6.
243) *Hilbert*, Gött. Nachr. 1904, p. 71.
244) *Schmidt*, Diss. Gött. § 5.
245) Gött. Nachr. 1904, p. 75.

von ihm noch beigefügte Stetigkeitsbedingung hat *E. Schmidt*[246]) als überflüssig erkannt. Der Kern heisst *geschlossen* (*Hilbert*), wenn der Gleichung:

$$\int_0^1 \alpha(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{158}$$

durch keine stetige Funktion $\varphi(t)$ genügt werden kann; für einen solchen Kern gilt der Satz: Ist $f(x)$ stetig und konvergiert die Entwicklung:

$$\sum c_\nu \psi_\nu(x), \qquad c_\nu = \int_0^1 \psi_\nu(t) f(t)\,dt \tag{159}$$

gleichmässig, so stellt sie notwendig die Funktion $f(x)$ dar.

Den Fall eines unsymmetrischen Kerns führt *Schmidt*[247]) auf den eines symmetrischen durch die Bemerkung zurück, dass

$$\bar{\alpha}(x,t) = \int_0^1 \alpha(x,u)\,\alpha(t,u)\,du \tag{160}$$

eine symmetrische Funktion von x und t ist.

Auf die Verwandtschaft einiger der angeführten Sätze mit neuen Resultaten von *W. Stekloff*[248]) sei hingewiesen.

f) Die vorangehende Theorie erlaubt Fragen der Maxima und Minima von Doppelintegralen[249]):

$$J(\varphi) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x,t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dt\,dx \tag{161}$$

zu behandeln. Ist der Kern *definit*, d. h. ist das Integral (161) positiv für jede stetige Funktion φ, und ist:

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx = 1, \tag{162}$$

so hat das Integral J kein Minimum; sein Maximum ist k_1^{-1} und tritt für $\varphi(x) = \psi_1(x)$ ein; im Bereich derjenigen Funktionen φ, die ausserdem den Bedingungen:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{163}$$

genügen, ist das Maximum k_m^{-1} und tritt für $\varphi(x) = \psi_m(x)$ ein.

---

246) Diss. Gött. § 9 u. Einleitung p. III.

247) Ebenda § 12.

248) Toulouse Fac. ann. (2) 6 (1905). Vgl. *Poincaré,* Acta 20 (1897), p. 118 u. f.

249) *Hilbert,* Gött. Nachr. 1904, p. 78.

g) Die bisher festgehaltene Bedingung, dass $\alpha(x, t)$ endlich und stetig sein soll, lässt sich durch eine weniger einschränkende ersetzen[250]). Ist $\alpha(x, t)$ längs einer Linie $x = \chi(t)$ der Ebene (x, t) unstetig oder unendlich, doch so, dass

$$(x - \chi(t))^{\varrho}\,\alpha(x, t)$$

für ein $\varrho < \frac{1}{2}$ stetig bleibt, so bleiben die bisherigen Resultate gültig. Auch für die unter den Integralzeichen auftretenden Funktionen sind solche Singularitäten von der Ordnung $< \frac{1}{2}$ zulässig.

h) Wie schon erwähnt, reichen die auf die Gleichung (139) sich beziehenden Überlegungen nicht aus zur Auflösung der Gleichung (120), also zur Umkehrung eines bestimmten Integrals. Die Bemerkung, dass $f(x)$ notwendig eine rationale ganze Funktion wird, sobald $\alpha(x, t)$ eine solche Funktion α von x ist, reicht schon aus, um erkennen zu lassen, dass in diesem Falle überhaupt die Natur von $f(x)$ von der von $\alpha(x, t)$ abhängt. Für Gleichungen dieser Art, die in der Potentialtheorie auftreten, sind die von *Kellogg*[251]) citierten Auflösungsformeln *Hilbert*'s zu erwähnen:

$$(164)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \operatorname{cotg} \pi(x-t)\,dt + \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \\[2ex] f(x) = -\displaystyle\int_0^1 \varphi(t) \operatorname{cotg} \pi(x-t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt, \end{cases}$$

in denen für die Integrale ihre Hauptwerte im Sinne von *Cauchy* zu nehmen sind; jede von ihnen ist die Auflösung der anderen. Übrigens sollen die Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, sowie auf die des Potentials und anderer Differentialgleichungen der mathematischen Physik in II A 12b besprochen werden[252]); hier seien nur noch zwei Anwendungen auf funktionentheoretische Probleme erwähnt. *Hilbert*[253]) behandelt das Problem: In einem einfach zusammenhängenden, von einer Kurve c begrenzten Bereich eine analytische Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ so zu bestimmen, dass der reelle und der imaginäre Bestandteil auf c als Funktionen der Bogenlänge dieser Kurve eine Gleichung der Form erfüllen:

---

250) Ebenda Abschn. VI. Die einschlägigen Überlegungen von *Kellogg* (Diss.) sind (nach *Hilbert*, loc. cit., p. 84) nicht streng.

251) Diss. Gött. § 6.

252) Vgl. eine zweite Mitteilung *Hilbert*'s in Gött. Nachr. 1904, p. 213.

253) Heidelb. intern. Kongr. 1904, p. 231; einfacher und vollständiger Gött. Nachr. 1905, p. 307.

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) + c(s) = 0, \tag{165}$$

in der $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ gegebene stetige und differentiierbare Funktionen bedeuten. *Kellogg*[254]) behandelt das *Riemann*'sche Problem: n bis auf gegebene Punkte reguläre analytische Funktionen zu finden, die sich nach einer Gruppe linearer Substitutionen transformieren, wenn die Variable geschlossene Kurven in ihrer Ebene durchläuft.

i) Alle diese Sätze gelten mutatis mutandis auch für *Integralgleichungen zweiter Art mit mehreren Variablen*[255])

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) - k\int^{(n)}\varphi(t_1,\ldots,t_n)\,\alpha(x_1,\ldots,x_n;\,t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n = f(x_1,\ldots,x_n). \tag{166}$$

32. Symbolische Gleichungen. Ebenso wie eine *Funktion* durch eine oder mehrere Eigenschaften bestimmt werden kann, die sich durch eine oder mehrere Funktionalgleichungen ausdrücken lassen, ebenso kann man eine *Operation* durch Eigenschaften bestimmen, die sich durch Gleichungen zwischen Operationssymbolen ausdrücken. So kann die Transformation von *Laplace* durch die beiden Gleichungen (50) definiert werden; ist D das Symbol der Ableitung und M das der Multiplikation mit x, so lauten diese beiden Gleichungen:

$$DA = AM, \qquad MA = -AD. \tag{167}$$

Auch die Gleichung von *Babbage* (81) und die von *Lémeray* (83) sind symbolische Gleichungen. Eine Theorie solcher Gleichungen — sie würde mit der Theorie der Differentialgleichungen Berührungspunkte darbieten — steht noch aus. Erwähnt seien nur noch die Gleichungen der Form[256]):

$$\lambda_0 A + \lambda_1 A' + \lambda_2 A'' + \cdots + \lambda_n A^{(n)} = 0, \tag{168}$$

in der $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gegebene Funktionen einer Variabeln x, A die zu bestimmende Operation, $A', A'', \ldots$ ihre Funktionalableitungen (Nr. **14**) bedeuten; ihre allgemeine Lösung ist eine lineare Kombination der Substitution S (Nr. **16**) und der Produkte SD, $SD^2, \ldots$ mit willkürlichen Funktionen von u als Koeffizienten.

254) Math. Ann. 60 (1905), p. 424. Vgl. übrigens auch hierzu die eben genannte Note *Hilbert*'s.

255) *Volterra,* Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 151; *Hilbert,* Götting. Nachrichten (1904), p. 52.

256) *Pincherle* e *Amaldi,* cap. VII, p. 144.

(Abgeschlossen im Dezember 1905.)