UND PHYSIK.
EYER UND E. JAHNKE.
IPZIG, POSTSTRASSE 3.

n (Briefe, Manuskripte, Re-
Redakteur:
gskirchstraße 61
rat Prof. Dr. E. Lampe in
Meyer in Königsberg i. Pr.
Redaktion an.
n größeren Aufsätzen 30 mit
trägen, Mitteilungen, Rezen-
ahl dagegen, als die genannte,

gen in 4 Heften und kostet
sgegeben werden. Alle Buch-

ihrem eigenen Interesse den
ch Möglichkeit einschränken
n, in nächster Zeit abgedruckt
sich durch den Umfang des
verhindert sieht, Inaugural-

PPELHEFTES.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE IN BERLIN. W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR. E. JAHNKE IN BERLIN.

11. BAND.

MIT 45 TEXTFIGUREN UND EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis.

Von A. Hurwitz in Zürich.

In den folgenden Zeilen will ich mich mit der nachstehenden Aufgabe beschäftigen:

„*Man soll alle Systeme von n positiven ganzen Zahlen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *bestimmen, deren Quadratsumme* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ *ohne Rest durch ihr Produkt* $x_1 x_2 \ldots x_n$ *teilbar ist.*“

Offenbar kommt diese Aufgabe auf die vollständige Lösung der diophantischen Gleichung

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1 x_2 \cdots x_n$$

in positiven ganzen Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ zurück.

Den Fall $n = 1$ lasse ich als interesselos bei Seite. Ist $n = 2$, so lautet die Gleichung (1)

$$x_1^2 + x_2^2 = x x_1 x_2,$$

woraus

$$2x_1 = x x_2 + x_2 \sqrt{x^2 - 4}$$

folgt. Daher muß $\sqrt{x^2 - 4}$ eine ganze Zahl t sein. Aus

$$x^2 - 4 = t^2 \quad \text{oder} \quad (x + t)(x - t) = 4$$

folgt aber $x + t = x - t = 2$, also

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x_1 = x_2.$$

Die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe wird demnach im Falle $n = 2$ durch ein System von zwei einander gleichen Zahlen $x_1 = x_2$ gebildet.

Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe werde ich nun $n \geqq 3$ voraussetzen.

Indem man die Gleichung (1) auf die Form

$$x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1 (x x_2 \cdots x_n - x_1)$$

bringt, erkennt man, daß

$$x_1' = x x_2 \ldots x_n - x_1$$

eine positive ganze Zahl ist, welche der Gleichung

$$x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x x_2 \cdots x_n - x_1')x_1',$$

oder

$$x_1'^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1' x_2 \cdots x_n$$

genügt. Es gilt also der

Satz 1. Bezeichnet

$$\xi = (x,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n)$$

eine Lösung der diophantischen Gleichung (1), so ist auch

$$\xi' = (x,\, x_1',\, x_2,\, \ldots\, x_n)$$

eine Lösung derselben, falls x_1' aus der Gleichung

$$x_1' + x_1 = x x_2 \ldots x_n \tag{2}$$

berechnet wird.

Aus der Symmetrie der Gleichung (1) in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ geht hervor, daß ebenso

$$\begin{gathered} \xi'' = (x,\, x_1,\, x_2',\, x_3,\, \ldots\, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi^{(n)} = (x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1},\, x_n') \end{gathered}$$

gleichzeitig mit ξ Lösungen der Gleichung (1) sind, wenn $x_2', \ldots x_n'$ aus den Gleichungen

$$\begin{gathered} x_2' + x_2 = x x_1 x_3 \ldots x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' + x_n = x x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \end{gathered}$$

bestimmt werden.

Jede der Lösungen $\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n)}$ will ich als der Lösung ξ *„benachbart"* oder auch als einen *„Nachbarn"* der Lösung ξ bezeichnen. Die Gleichung (2) zeigt unmittelbar, daß auch ξ der Lösung ξ' benachbart ist, und Entsprechendes gilt von den Lösungen $\xi'', \ldots \xi^{(n)}$. Wenn also von zwei Lösungen die erste zur zweiten benachbart ist, so ist auch umgekehrt die zweite zur ersten benachbart. Bildet man, von einer Lösung ξ ausgehend, die Reihe von Lösungen

$$\xi,\, \eta,\, \zeta,\, \ldots\, \omega \tag{3}$$

in der Weise, daß jede ein Nachbar der unmittelbar vorhergehenden ist, also η ein Nachbar von ξ, sodann ζ ein Nachbar von η usf. so sollen die Lösungen $\eta, \zeta, \ldots \omega$ aus der Lösung ξ *„abgeleitet"* heißen. Wenn die Lösung ω aus der Lösung ξ abgeleitet werden kann, so kann auch umgekehrt ξ aus ω abgeleitet werden. Denn in der Reihe (3) ist auch jede Lösung ein Nachbar der unmittelbar folgenden.

Geht man von einer Lösung zu einer benachbarten über, so ändert sich der Wert der Unbekannten x nicht. Daraus folgt:

Satz 2. Wenn zwei Lösungen auseinander abgeleitet werden können, so stimmen sie in dem Werte der Unbekannten x überein.

Als „*Höhe*" einer Lösung

$$\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

der Gleichung (1) bezeichne ich nun die Summe

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

und knüpfe hieran die folgende

Definition: Eine Lösung der Gleichung (1) heiße eine „Grundlösung", wenn keine der n ihr benachbarten Lösungen eine kleinere Höhe besitzt wie sie.

Die Bedeutung dieses Begriffes der Grundlösung beruht auf folgendem

Satz 3. Jede Lösung der Gleichung (1) ist entweder eine Grundlösung oder sie läßt sich aus einer Grundlösung ableiten.

In der Tat, wenn die Lösung ξ nicht Grundlösung ist, so besitzt sie einen Nachbarn η von kleinerer Höhe. Wenn η ebenfalls nicht Grundlösung ist, so besitzt η einen Nachbarn ζ von kleinerer Höhe So fortfahrend erhält man eine Reihe von Lösungen:

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tag{4}$$

von denen jede ein Nachbar der unmittelbar vorhergehenden ist und deren Höhen eine abnehmende Reihe bilden. Da die Höhen positive ganze Zahlen sind, so muß die Reihe (4) notwendig abbrechen, d. h. man kommt bei Fortsetzung der Reihe (4) notwendig einmal zu einer Lösung ω, die Grundlösung ist. Aus dieser Grundlösung ω läßt sich dann die Lösung ξ ableiten.

Dem Satze 3. zufolge genügt es zur vollständigen Auflösung der Gleichung (1), die Grundlösungen zu bestimmen. Ich werde nun zeigen, daß es nur eine endliche Zahl von Grundlösungen gibt, und zugleich die Mittel zu ihrer Herstellung angeben.

Soll die der Lösung $\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ benachbarte Lösung $\xi' = (x, x_1', x_2, \ldots x_n)$ keine kleinere Höhe haben, wie ξ, so muß $x_1 \leqq x_1'$, oder nach Gleichung (2)

$$2x_1 \leqq x x_2 \ldots x_n$$

oder auch

(5) $$2x_1^2 \leqq x x_1 x_2 \dots x_n$$

sein. Eine entsprechende Überlegung läßt sich auf die übrigen benachbarten Lösungen von ξ anwenden. Demnach gilt der

Satz 4. Die Lösung

$$\xi = (x, x_1, x_2, \dots x_n)$$

ist dann und nur dann eine Grundlösung, wenn die n Ungleichungen

(6) $$2x_i^2 \leqq x x_1 x_2 \dots x_n \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

erfüllt sind.

Die Symmetrie dieser Ungleichungen zeigt, daß eine Grundlösung durch eine beliebige Permutation von $x_1, x_2, \dots x_n$ wieder in eine Grundlösung übergeht. Es genügt deshalb, diejenigen Grundlösungen aufzusuchen, welche den Ungleichungen

(7) $$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \dots \geqq x_n$$

genügen. Für diese Grundlösungen sind übrigens die Ungleichungen (7) zusammen mit der einen Ungleichung (5) völlig charakteristisch, da die Ungleichungen (6) sämtlich zugleich mit den Ungleichungen (5) und (7) erfüllt sind.

Ich bringe nun die Gleichung (1) auf die Form

$$(x x_2 x_3 \cdots x_n - 2x_1)^2 = x^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 - 4(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2),$$

aus welcher leicht

(8) $$x x_1 x_2 \dots x_n - 2x_1^2 = x_1 x_2 x_3 \dots x_n \sqrt{x^2 - 4p_1}$$

hervorgeht, wobei

(9) $$p_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{x_2^2 x_3^2 \dots x_n^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1^2}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \cdot x_1^2$$

ist. Durch Vertauschung von x_1 mit x_i entsteht hieraus

(10) $$x x_1 x_2 \dots x_n - 2x_i^2 = x_1 x_2 x_3 \dots x_n \sqrt{x^2 - 4p_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n)$$

und

(11) $$p_i = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_i^2}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \cdot x_i^2. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Nun möge

$$\xi = (x, x_1, x_2, \dots x_n)$$

eine Grundlösung sein, welche den Ungleichungen (7) genügt.

Wegen der Ungleichungen (6) sind dann die Quadratwurzeln, welche in den Gleichungen (10) auftreten, nicht negativ, und unter ihnen gilt, wegen der Ungleichungen (7), die Größenfolge:

$$\sqrt{x^2-4p_1} \leqq \sqrt{x^2-4p_2} \leqq \cdots \leqq \sqrt{x^2-4p_n}. \tag{12}$$

Durch Addition der Gleichungen (10) kommt

$$n x x_1 x_2 \cdots x_n - 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = x_1 x_2 \cdots x_n\bigl(\sqrt{x^2-4p_1} + \sqrt{x^2-4p_2} + \cdots + \sqrt{x^2-4p_n}\bigr),$$

und hieraus in Rücksicht auf die Gleichung (1)

$$\sqrt{x^2-4p_1} + \sqrt{x^2-4p_2} + \cdots + \sqrt{x^2-4p_n} = (n-2)x. \tag{13}$$

Aus der Kombination von (12) und (13) folgt

$$n\sqrt{x^2-4p_1} \leqq (n-2)x, \quad n^2(x^2-4p_1) \leqq (n-2)^2x^2, \quad (n-1)x^2 \leqq n^2p_1$$

oder, nach Gleichung (9),

$$(n-1)x^2x_2^2x_3^2\cdots x_n^2 \leqq n^2(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2). \tag{14}$$

Nach den Ungleichungen (7) ist ferner

$$x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2 \leqq (n-1)x_2^2,$$

so daß aus (14)

$$x x_3 \ldots x_n \leqq n \tag{15}$$

hervorgeht. Endlich ergibt die Ungleichung (5):

$$2x_1^2 \leqq x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

oder

$$x_1^2 - x_2^2 \leqq x_3^2 + \cdots + x_n^2. \tag{16}$$

Aus der Ungleichung (15) folgt, daß

$$x,\ x_3, \ldots x_n$$

nur eine endliche Zahl von Wertsystemen annehmen können. Für das einzelne dieser Wertsysteme kann dann, nach Ungleichung (16),

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \tag{17}$$

nur einen der Werte $0, 1, 2, \cdots (x_3^2 + \cdots + x_n^2)$ erhalten, sodaß auch für x_1 und x_2 nur eine endliche Zahl von Werten zulässig sind. Denn einen gegebenen positiven Wert nimmt der Ausdruck (17) überhaupt nur für endlich viele Zahlenpaare x_1, x_2 an, den Wert Null aber nur dann, wenn x_1 und x_2 denselben, der Gleichung

$$2x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1^2 x_3 \cdots x_n$$

genügenden Wert haben, und dieser Gleichung genügt, wenn überhaupt, nur *ein* positiver ganzzahliger Wert x_1.

Die Anzahl der Grundlösungen der Gleichung (1) ist also in der Tat endlich. Zu ihrer Bestimmung stehen, außer der Gleichung (1), die Ungleichungen (7), (14), (15), (16) zur Verfügung. Diesen kann man noch eine weitere hinzufügen. Da nämlich $\sqrt{x^2 - 4p_1}$ reell ist, so muß $4p_1 \leqq x^2$, oder nach Gleichung (9)

$$(18) \qquad 4(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2) \leqq (x x_2 x_3 \cdots x_n)^2$$

sein.

Aus den Grundlösungen lassen sich nach Satz 3. die sämtlichen Lösungen der Gleichung (1) ableiten. Daß hierbei aber auch keine der Grundlösungen entbehrt werden kann, geht aus dem folgenden Satze hervor:

Satz 5. Keine der Grundlösungen kann aus einer andern abgeleitet werden.

Dem Beweise schicke ich zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Zwei Nachbarlösungen von gleicher Höhe sind identisch.

Denn zwei Nachbarlösungen stimmen in der Unbekannten x und in $n-1$ der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ überein. Daher müssen sie auch in der letzten Unbekannten übereinstimmen, wenn ihnen derselbe Wert der Höhe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ zukommt.

Hilfssatz 2. Eine Lösung ξ kann höchstens einen Nachbarn von kleinerer Höhe besitzen.

Angenommen nämlich, es wären die Nachbarn $\xi^{(i)}$ und $\xi^{(k)}$ beide von kleinerer Höhe wie $\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$, so würde

$$2x_i^2 > x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$
$$2x_k^2 > x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

sein, woraus durch Addition die widersinnige Ungleichung

$$2(x_i^2 + x_k^2) > 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

folgen würde.

Um nun den Satz 5. zu beweisen, zeige ich, daß die Annahme, eine Grundlösung ω könne aus einer andern ξ abgeleitet werden, auf einen Widerspruch führt.

Aus dieser Annahme folgt, daß es eine Reihe von Lösungen der Gleichung (1)

$$\xi, \eta, \ldots \sigma, \ldots \tau, \ldots \omega$$

gibt, von welchen jede Nachbar der vorhergehenden ist. Man darf nun voraussetzen, daß in dieser Reihe nicht ein und dieselbe Lösung mehr als einmal auftritt. Denn wäre etwa $\sigma = \tau$, so könnte man in der Reihe die auf σ folgenden Glieder bis τ inklusive unterdrücken. Zwei nebeneinander stehenden Gliedern der Reihe entsprechen dann nach Hilfssatz 1 verschiedene Höhen. In der Reihe möge nun der größte Höhenwert der Lösung σ zukommen. Es fällt dann σ nicht mit ξ zusammen, da ξ als Grundlösung geringere Höhe hat wie η; aus entsprechendem Grunde fällt σ auch nicht mit ω zusammen. Folglich steht σ in der Reihe zwischen zwei anderen voneinander verschiedenen Lösungen. Diese würden aber beide zu σ benachbart und von kleinerer Höhe wie σ sein, worin ein Widerspruch gegen den Hilfssatz 2. liegt.

Aus diesem Hilfssatz folgt noch eine bemerkenswerte Tatsache. Bedeutet ξ eine Lösung der Gleichung (1), die nicht Grundlösung ist, so kann man die Reihe von Lösungen

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

nach Hilfssatz 2. nur auf *eine* Weise so bestimmen, daß jede Lösung ein Nachbar der vorhergehenden und zugleich von niedrigerer Höhe als die vorhergehende ist. Jede Lösung der Gleichung (1) kann also im wesentlichen nur auf *eine* Weise aus einer Grundlösung abgeleitet werden.

Aus den Ungleichungen, welche für die den Bedingungen (7) genügenden Grundlösungen gelten, will ich nun einige Folgerungen ziehen.

Die Ungleichung (15) lehrt, daß der Wert von x in keiner Grundlösung größer als n sein kann. Hieraus folgt weiter, in Rücksicht auf die Sätze 2 und 3, daß es überhaupt keine Lösung der Gleichung (1) gibt, für welche $x > n$ wäre. Das heißt, es gilt der

Satz 6. Bedeutet a eine gegebene positive ganze Zahl, die größer als n ist, so besitzt die diophantische Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a x_1 x_2 \cdots x_n \tag{19}$$

keine Auflösung in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Nimmt man an, daß die ganzen (nicht notwendig positiven) Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gleichung (19) genügen, so müssen dieselben offenbar sämtlich Null sein, wenn es eine unter ihnen ist. Falls dieselben aber sämtlich von Null verschieden wären, so würden ihre absoluten Beträge $|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|$ ebenfalls der Gleichung (19) genügen. Aus dem Satze 6. folgt daher, daß die Gleichung (19), abgesehen von der trivialen Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, keine Auflösung in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zuläßt.

Wenn in der Ungleichung (15)

$$x = n$$

vorausgesetzt wird, so kann sie nur bestehen, falls

$$x_3 = \cdots = x_n = 1$$

ist. Dann folgt aber aus Ungleichung (14)

$$(n-1)n^2 x_2^2 \leqq n^2(x_2^2 + n - 2), \quad x_2^2 \leqq 1,$$

also $x_2 = 1$ und sodann aus der Gleichung (1) schließlich $x_1 = 1$.

Dem Werte $x = n$ entspricht demnach die einzige Grundlösung

$$x = n, \quad x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1,$$

aus welcher also die sämtlichen Lösungen der Gleichung (1), für welche $x = n$ ist, abgeleitet werden können. Es gilt mit anderen Worten der

Satz 7. Die sämtlichen Lösungen der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n x_1 x_2 \cdots x_n$$

in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *lassen sich aus der einen Lösung*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$$

ableiten.[1])

Für die Werte von n, die 10 nicht überschreiten, habe ich die Grundlösungen der Gleichung (1) berechnet. Dabei habe ich außer den oben aufgestellten Ungleichungen noch einige weitere aus ihnen hervorgehende benutzt, die ich zunächst ableiten will.

Dividiert man die Ungleichung (14) durch die Ungleichung $x^2 \geqq 1$, so ergibt sich

$$(n-1)x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2(x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2),$$

oder

$$(20) \qquad [(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]x_2^2 \leqq n^2(x_3^2 + \cdots + x_n^2).$$

Entweder ist nun

$$\text{(a)} \qquad (n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2,$$

oder aber

$$\text{(b)} \qquad (n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 > n^2.$$

1) Die diophantische Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1 x_2 x_3$ behandelt A. Markoff in seiner Abhandlung „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies", Math. Annalen, Bd. 17, S. 396. Markoff beweist hier, daß die sämtlichen Lösungen der Gleichung aus der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ abgeleitet werden können, also den $n = 3$ entsprechenden speziellen Fall des Satzes 7.

Im letzteren Falle folgt aus (20), da $x_3 \leqq x_2$ ist,

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]x_3^2 \leqq n^2(x_3^2 + Q),$$

wo zur Abkürzung

$$Q = x_4^2 + \cdots + x_n^2$$

gesetzt ist. Da nun

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]^2 = n^4 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2 \cdot x_3^2[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - 2n^2]$$

ist, so schließt man aus der letzten Ungleichung

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]^2 \leqq n^4 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2 \cdot n^2 Q,$$

oder endlich

$$(21) \quad (n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2(x_4^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Diese unter der Voraussetzung (b) abgeleitete Ungleichung gilt a fortiori, wenn (a) stattfindet. Sie gilt daher in jedem Falle.

Die Ungleichung (21) gibt eine obere Grenze für die Werte, welche x_3 annehmen kann, nachdem $x_4, \ldots x_n$ bestimmt gewählt sind; sodann gibt die Ungleichung (20) eine obere Grenze für die zulässigen Werte von x_2, jedoch nur, wenn der Fall (b) vorliegt.

Ist beispielsweise $x_4 = \cdots = x_n = 1$, so ergibt die Ungleichung (21)

$$(n-1)x_3^2 \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 + (n-1)(n-3)} = n^2 + n\sqrt{2(n-1)^2 + 1}.$$

Die Aufstellung der Grundlösungen wird, außer durch die Ungleichungen (20) und (21), auch noch durch die Tatsache erleichtert, daß von $n = 5$ ab in jeder Grundlösung mehrere der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert 1 besitzen. Es besteht nämlich der

Satz 8. Wenn $n \geqq 5$ ist und $(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine den Bedingungen (7) *genügende Grundlösung der Gleichung* (1) *bedeutet, so besitzen sicher die $n - 2 - k$ letzten der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert* 1. *Dabei bezeichnet k die durch die Ungleichungen*

$$2^k \leqq n < 2^{k+1}$$

bestimmte ganze Zahl.

In der Tat können nicht mehr als k der Zahlen $x_3, \ldots x_n$ größer als 1 sein, weil sonst ihr Produkt mindestens gleich $2^{k+1} > n$ ausfallen würde, im Widerspruch mit der Ungleichung $x x_3 \ldots x_n \leqq n$. Man überzeugt sich ferner leicht, daß von $n = 5$ ab $n - 2 - k > 0$ ist.

Ich stelle nun die den Bedingungen (7) genügenden Grundlösungen der Gleichung (1) bis $n = 10$ in der folgenden Tabelle zusammen:

Tabelle der Grundlösungen.

n	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	3	1	1	1							
	1	3	3	3							
4	4	1	1	1	1						
	1	2	2	2	2						
5	5	1	1	1	1	1					
	4	2	1	1	1	1					
	1	4	3	3	1	1					
6	6	1	1	1	1	1	1				
	3	2	2	1	1	1	1				
7	7	1	1	1	1	1	1	1			
	5	2	1	1	1	1	1	1			
	3	3	2	1	1	1	1	1			
	2	2	2	2	1	1	1	1			
	1	3	2	2	2	1	1	1			
8	8	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	4	2	2	2	1	1	1	1		
9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	6	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
10	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	6	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1
	1	4	4	3	1	1	1	1	1	1	1

An diese Tabelle knüpfe ich noch einige Bemerkungen.

Nur in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ kommt es vor, daß die Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer Grundlösung einen allen gemeinsamen Teiler aufweisen.

Man beweist nun in der Tat leicht den

Satz 9. Wenn $n > 4$ ist, so gibt es keine Lösung der Gleichung (1), in welcher $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen gemeinsamen Teiler besitzen.

Angenommen nämlich, es wäre

$$x_1 = \partial y_1, \quad x_2 = \partial y_2, \ldots x_n = \partial y_n, \quad \partial \geqq 2,$$

so würde

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \partial^{n-2} x \cdot y_1 y_2 \cdots y_n$$

folgen. Nach Satz 6. müßte nun

$$\partial^{n-2} x \leqq n$$

und, da $2^{n-2} \leqq \delta^{n-2}$, auch

$$2^{n-2} \leqq n$$

sein. Diese Ungleichung ist aber von $n = 5$ ab nicht erfüllt.

Der Satz 9. läßt sich übrigens auch ohne Schwierigkeit aus dem Satze 8. ableiten.

Die Tabelle der Grundlösungen zeigt ferner, daß die Unbekannte x nur einen Teil der Werte $\leqq n$ annehmen kann. Nach den Sätzen 2. und 3. folgt hieraus der

Satz 10. Bezeichnet a eine positive ganze Zahl, so besitzt die diophantische Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a x_1 x_2 \cdots x_n \tag{22}$$

Auflösungen in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur für $a = 1$ und $a = 3$, falls $n = 3$ ist; nur für $a = 1$ und $a = 4$, falls $n = 4$ ist; nur für $a = 1$, $a = 4$ und $a = 5$, falls $n = 5$ ist u. s. f.

Für einen unbestimmten Wert von n dürfte es schwierig sein, diejenigen Werte von $a \leqq n$ allgemein zu charakterisieren, für welche die Gleichung (22) Auflösungen in positiven ganzen Zahlen besitzt.

Die im vorstehenden entwickelte Theorie der Gleichung (1) läßt sich noch in anderer Weise auffassen, wobei ihre Analogie mit der Zahlentheorie der quadratischen Formen hervortritt. Die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante D sind eindeutig zugeordnet den Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x_1^2 - x_2 x_3 = D. \tag{23}$$

Die Einteilung der Formen in Klassen kommt also auf eine Einteilung der Lösungen der Gleichung (23) in Klassen hinaus, wobei zwei Lösungen (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') dann in dieselbe Klasse gehören, wenn die eine aus der andern durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{cases} x_2' = x_2 \alpha^2 + 2 x_1 \alpha \gamma + x_3 \gamma^2 \\ x_1' = x_2 \alpha \beta + x_1 (\alpha \delta + \beta \gamma) + x_3 \gamma \delta \\ x_3' = x_2 \beta^2 + 2 x_1 \beta \delta + x_3 \delta^2 \end{cases} \tag{24}$$

abgeleitet werden kann, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ verstanden. In jeder Klasse von Lösungen gibt es eine „reduzierte", durch Ungleichungen charakterisierte Lösung. Die Anzahl dieser reduzierten Lösungen — und damit die Anzahl der Klassen — ist eine endliche. Hat man die reduzierten Lösungen der Gleichung (23) aufgestellt, so ergeben sich aus ihnen alle übrigen Lösungen vermöge der Formeln (24).

In ganz entsprechender Weise hat man nun eine Einteilung der Lösungen der Gleichung (1) in Klassen, wenn man zwei Lösungen dann in dieselbe Klasse rechnet, falls sie in dem oben festgesetzten Sinne auseinander abgeleitet werden können. In jeder solchen Klasse gibt es eine durch Ungleichungen charakterisierte „reduzierte" Lösung, nämlich die Grundlösung, aus welcher sich alle Lösungen der Klasse ableiten lassen. Die Anzahl der Klassen von Lösungen stimmt mit der Anzahl der Grundlösungen überein und ist also, wie diese, endlich.

Auch auf die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x x_1 x_2 \cdots x_n = D, \tag{26}$$

wo D eine gegebene ganze Zahl bedeutet, läßt sich dieselbe Einteilung der Lösungen in Klassen in Anwendung bringen, wie auf die, dem Falle $D = 0$ entsprechende Gleichung (1). Die ein und derselben Klasse angehörenden Lösungen der Gleichung (26) stimmen dann wieder in dem Werte der Unbekannten x überein. Ferner ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie ich sie oben für die Gleichung (1) angestellt habe, daß für einen negativen Wert von D die Anzahl der Klassen endlich ist. Dagegen ist dies nicht mehr allgemein der Fall, wenn D positiv ist, weil dann für $n < 5$ möglicherweise, für $n \geqq 5$ aber stets Lösungen der Gleichung (26) existieren, in welchen eine der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwindet, und für welche daher x jeden beliebigen Wert besitzen kann. Betrachtet man aber für den Fall $D > 0$ nur diejenigen Klassen, in welchen keine Lösung vorkommt, für welche eine der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert Null besitzt, so ist die Anzahl dieser Klassen wieder endlich.

Übrigens läßt sich im Falle eines negativen Wertes von D die Auflösung der Gleichung (26) auf die einer Gleichung der Form (1) zurückführen. In der Tat, ist etwa

$$D = -m,$$

so entsprechen die Lösungen der Gleichung (26) offenbar einzeln denjenigen Lösungen der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+m}^2 = x x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_{n+m},$$

in welchen die Unbekannten $x_{n+1}, \ldots x_{n+m}$ den Wert 1 besitzen.

Zürich, d. 20. Dezember 1905.

Inhalt.

Rezensionen.