UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

Publications Mathématiques d'Orsay

n° 67 - 74 09

Théorie des Invariants Holomorphes

par Jean Ecalle

Publications Mathématiques d'Orsay
n° 67 - 74 09

Théorie des Invariants Holomorphes

par Jean Ecalle

A Monsieur DELANGE

qui n'a cessé depuis le début
de me prodiguer des conseils
pleins de compétence
et de sympathie.

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

P R E A M B U L E

Notre premier mot sera pour exprimer notre infinie gratitude à Monsieur H. Delange, qui a depuis le début dirigé nos travaux avec la plus extrême bienveillance, et sans les précieux conseils de qui la présente thèse n'aurait jamais vu le jour.

Nous avons commencé à étudier sérieusement les questions exposées ici en 69 et surtout 70. Nous obtînmes la moitié environ des résultats de cette thèse (c'est-à-dire grosso modo A-I, II, III, IV et B-IV) en octobre 1970 : voir à ce sujet nos articles [4] , [5] *et* [6] .
Quant à l'autre moitié (c'est-à-dire B-I, II, III) nous l'obtînmes en août-septembre 1971 : voir à ce sujet notre article [12] *et surtout* [13] *, qui expose succinctement l'essentiel de la théorie des invariants holomorphes. (Ces deux derniers articles parurent en 1973, mais les manuscrits en furent remis dès octobre 1971 à la revue "Vjestnik Leningradsk. Univ." par Monsieur V. P. Khavine, de l'Université de Leningrad.)*

Voici les deux remarques qui sont à l'origine de la présente théorie.

Désignons par $\mathcal{G}_k$ (*resp* $\mathcal{H}_k$) *le groupe formé des* f *holomorphes en* 0 *et telles que :* $f(0)=0$ *et* $f'(0)=1$ (*resp* $f'(0)\neq 0$) *. La loi de groupe est la composition :*

$$(f,g) \rightarrow f\circ g$$

Remarque 1 : Etant donné $f \in \mathcal{G}_k$, l'équation

(I) $$f = g \circ g \circ \ldots g \text{ (n fois)} = g^{\circ n}$$

a parfois une solution g dans $\mathcal{G}_k$ pour tout n, et parfois pour un nombre fini de n seulement, parfois enfin pour $n = 1$ uniquement.

Remarque 2 : Etant donné f et g de $\mathcal{G}_k$, l'équation (en h)

(2) $$h \circ f = g \circ h$$

admet des solutions formelles h si est vérifiée une condition $C_1 = C_1(f,g)$ qui est assez simple (elle ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients de f et g), mais, même lorsque C_1 est vérifiée, l'équation (2) n'admet pas, en général, de solutions $h \in \mathcal{H}_k$.

La remarque 1 est le point de départ de la théorie itérative.

La remarque 2 est le point de départ de la théorie des invariants holomorphes.

La théorie itérative (partie A du présent travail) étudie pour quels f de $\mathcal{G}_k$ l'équation (1) admet des solutions, notées $f^{\circ(1/n)}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ elle montre qu'on peut alors définir $f^{\circ w}$ d'une manière naturelle pour tout $w \in \mathbb{C}$, et non plus pour $w^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas f est dite pleinement itérable. Si f n'est pas pleinement itérable, $\tilde{f}^{\circ w}$ désigne simplement une série formelle non convergente en général, sauf pour des w appartenant à un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$, noté W_f, et dont on montre le caractère réel. Enfin, et surtout, on construit les "éléments itératifs sectoriels" des f générales de $\mathcal{G}_k$, itérables ou non. (Voir ci-dessous). Et ce sont ces "éléments itératifs sectoriels", qui nous permettent de développer la théorie des invariants holomorphes.

Etat antérieur de la question : malgré le nombre assez considérable d'auteurs qui avaient étudié ces problèmes, et la longue liste de publications *qui leur ont été consacrées (voir indications bibliographiques), nous croyons pouvoir affirmer que rien de considérable n'avait été trouvé et que les problèmes essentiels étaient irrésolus. Quant à la théorie des invariants holomorphes, elle n'existait même pas, sous aucune forme, aussi embryonnaire que ce fût.*

En ce qui concerne la théorie itérative, voici quels étaient les résultats acquis :

$*$) *on connaissait l'existence de* f *de* $\mathcal{G}_k$ *non pleinement itérables, et, pour ces dernières, la nature discrète du groupe* W_f *(mais on ignorait sa réalité, démontrée ici).*

$*$) *on utilisait une* <u>*série formelle*</u>*, notée ici* $\tilde{f}_*$ *, et nommée "logarithme itératif", associée à tout* f *de* $\mathcal{G}_k$ *, et caractérisée par*

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \tilde{f}_* \circ f = f'\,\tilde{f}_* \\ \tilde{f}_*(z) = f(z) - z + o\big(f(z)-z\big) \end{array}\right.$$

(égalités entre séries formelles)

$*$) *on connaissait une condition nécessaire et suffisante de pleine itérabilité, pour un* f *de* $\mathcal{G}_k$ *, en fonction de* $\tilde{f}_*$

$*$) *on donnait quelques exemples de fonctions* f *et* g *de* $\mathcal{G}_k$ *, pleinement itérables, et telles que* $f \circ g$ *n'était pas pleinement itérable.*

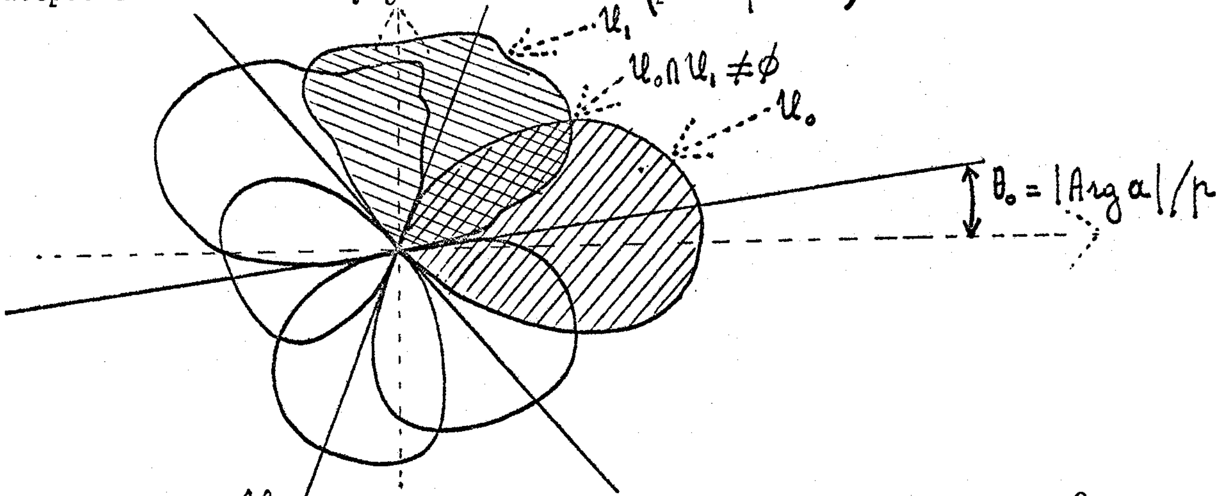
Et là s'arrête, sauf omission de notre part, la liste des résultats connus. Bien entendu, rien n'avait été fait touchant la partie B, c'est-à-dire la théorie des <u>*invariants holomorphes*</u>*.*

A notre avis, si les divers auteurs s'étant penchés sur ces questions, n'ont pas pu progresser davantage, c'est parce qu'il leur manquait l'outil essentiel de la théorie, c'est-à-dire les "éléments itératifs sectoriels", et notamment les <u>*"logarithmes itératifs sectoriels"*</u>*, que nous notons* f_{*j} *, et dont voici grosso modo la définition :*

pour tout f de $\mathcal{G}_k$ (pleinement itérable ou non), et de la forme

(4) $$f(z) = z + a z^{p+1} + \dots \ ; a \neq 0 \ ; p \geq 1$$

il existe $2p$ domaines $\mathcal{U}_j \ (j \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})$, rayonnant autour de l'origine, et disposés comme sur la figure ci-dessous (pour $p = 3$).



et sur chacun des $\mathcal{U}_j$ il existe une seule fonction holomorphe, notée f_{*j} (et nommée "logarithme itératif sectoriel d'indice j "), qui vérifie sur $\mathcal{U}_j$ le système (3) et qui en outre possède en 0 un développement asymptotique.

Le second fait essentiel est que les intersections $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}$ de deux "feuilles" consécutives, sont d'intérieur non vide, et que sur $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}$ on dispose de deux solutionscanoniques du système (3), soit f_{*j} et f_{*j+1} .

La considération de <u>cette paire de logarithmes itératifs sectoriels</u> permet :

*) d'une part de montrer la réalité de W_f lorsque f n'est pas pleinement itérable.

*) d'autre part, et surtout, de construire, par des combinaisons judicieuses de f_{*j} et f_{*j+1}, des systèmes complets et libres <u>"d'invariants holomorphes"</u> du groupe $\mathcal{G}_k$.

Par invariant de $\mathcal{G}_k$, nous entendons toute fonction :

$f \longrightarrow I(f)$, *à argument* f *dans* $\mathcal{G}_k$, *et telle que :*

(5) $$I(\sigma . f) = I(f) \quad ; \ \forall f \text{ et } \forall \sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{G}_k .$$

où Aut $\mathcal{G}_k$ *désigne le groupe des automorphismes de* $\mathcal{G}_k$

C'est la remarque 2 ci-dessus qui invite à la recherche de tels invariants : en effet, elle montre que pour assurer à l'équation (2) l'existence d'une solution h (*de* $\mathcal{H}_k$) *il faut ajouter à la condition* C_1 *une autre condition* C_2 , *et que* C_2 *doit pouvoir se mettre sour la forme* : $C_2 = C_2(f,g) : I_i(f) = I_i(g) \ \forall i \in J$ *où* J *est un certain ensemble d'indices et les* I_i *sont des invariants de* $\mathcal{G}_k$.

Après coup, on s'aperçoit que les invariants holomorphes sont des outils extrêmement précieux, et qu'ils permettent de résoudre bien d'autres problèmes que celui de la "conjugabilité" (*c'est-à-dire de la résolubilité en* h *de (2)*) .

En résumé, dans le présent travail nous empruntons trois choses à nos prédecesseurs :

*) *la notion de* *__logarithme itératif formel__* *(connue dans la littérature sous divers autres noms, et de portée de toute façon très limitée)*

*) *un lemme dû à E. Jabotinski (le lemme 1 de (A, II, § 4)) relatif aux polynômes.*

*) *une méthode, utilisée par I. N. Baker pour démontrer un cas particulier de notre théorème* __*2, a*__ *(A, III § 1).*

Le reste est original, autant que nous le sachions.

Sont entièrement nouvelles, en particulier, les parties (A, I, § 3) (A, II) (A, III, §§ 2, 3, 4) (A, IV) (*sur les théorèmes "d'extrémalité"*) *et bien entendu la partie B tout entière, consacrée aux "invariants holomorphes".*

INTRODUCTION

1) GENERALITES.

Les deux parties (A et B) du présent travail développent, comme leurs titres l'indiquent, la théorie itérative et la théorie des invariants dans divers groupes $\mathcal{G}$, et principalement dans le groupe $\mathcal{G}_k$ des fonctions f, holomorphes en 0 et telles que $f(0) = 0\,;\ f'(0) = 1$ (la loi de groupe étant la composition des fonctions).

La théorie itérative, bien que présentant un intérêt autonome, est pour nous avant tout un moyen de construire et d'étudier les invariants holomorphes - construction et étude qui sont l'objet essentiel de ce travail.

Indiquons d'emblée l'allure générale des solutions dans le cas principal, celui du groupe $\mathcal{G}_k$: on construit effectivement des systèmes libres et complets d'invariants sur $\mathcal{G}_k$; on établit que tout système complet d'invariants scalaires sur $\mathcal{G}_k$ est au moins dénombrable, et pour les systèmes canoniques que l'on construit, on montre que chaque invariant scalaire I est une fonction entière d'une infinité dénombrable de variables complexes, à savoir la suite $\{a_n\}$ des coefficients de Taylor en 0 de chaque élément de $\mathcal{G}_k$; enfin, on étudie la dépendance de $I\{(a_n)\}$ par rapport à ses variables, autrement dit : on donne le moyen de calculer chaque dérivée partielle :

$$\frac{\partial^{n}}{\partial a_{n_1}\partial a_{n_2}\cdots\partial a_{n_k}}\, I\{(a_n)\}.$$

Ces systèmes d'invariants servent ensuite à résoudre divers problèmes depuis longtemps posés et irrésolus, tels que celui-ci : étant donné deux éléments f et g de $\mathcal{G}_k$, à quelles conditions, nécessaires et suffisantes, existe-t-il un changement de variable holomorphe $z \to Z = h(z)$ conjuguant f et g, c'est-à-dire tel que : $h \circ f = g \circ h$.

Quant à la théorie itérative de la partie A (qui — répétons-le — a pour fonction principale de préparer la construction des invariants holomorphes de la partie B) elle étudie divers groupes de transformations : groupes de transformations formelles : $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$, $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ groupes de germes de transformations réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$: $\hat{\mathcal{G}}$, $\hat{\mathcal{H}}$, groupes analytiques : $\mathcal{G}_k$, $\mathcal{H}_k$ et aussi divers groupes de germes de transformations quasi-analytiques de classe donnée (voir conclusion).

Dans chacun de ces groupes on se préoccupe d'abord de construire et d'étudier une "itération fractionnaire" naturelle, c'est-à-dire de conserver un sens satisfaisant à l'expression $f^{\circ n}$ $\left(\text{où } f^{\circ n} = f \circ f \circ \ldots \circ f ; \ n \text{ fois, si } n \in \mathbb{N}\right)$ lorsque n n'est plus un entier, mais selon les cas, un réel ou un complexe quelconque. On voit alors apparaître, à l'égard de l'itération fractionnaire, des différences essentielles entre les différents groupes, et, au sein d'un même groupe G, entre les différents éléments de G. Pour chaque f de G, on étudie W_f, c'est-à-dire le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ formé des w tels que f admet une "itérée" généralisée d'ordre w. Enfin on s'intéresse à l'ensemble IG des éléments pleinement itérables de G, c'est-à-dire tels que $W_f = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tout entier.

De plus, la théorie itérative fait un usage constant, partout où c'est possible, des algèbres de Lie correspondant aux différents groupes étudiés (algèbres de dimensions infinies) ainsi que de quelques outils essentiels qui sont "les résidus itératifs", les "logarithmes itératifs" ("globaux", "sectoriels", "partiels"), les "itérateurs" et les "préitérateurs".

Nous donnons ci-après un rapide aperçu des parties A et B. Nous indiquons ensuite où la question en était avant le présent travail, quels problèmes nous avons résolus, et quelles questions se posent encore. Nous terminons par les indications bibliographiques.(*)

2) APERCU SUR LA PARTIE A (Théorie itérative).

Chapitre I : §§ 1, 2) Nous rappelons les résultats concernant la théorie itérative dans les groupes $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ de séries formelles, résultats établis dans notre thèse de 3ème cycle.

§ 3) Nous construisons la théorie itérative dans les semi-groupes (pour la composition) $\hat{\mathcal{G}}_{\pm}$ et $\hat{\mathcal{H}}_{\pm}$, dont les éléments sont des germes (en 0, à droite) de fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, et nous établissons le résultat essentiel concernant l'indéfinie différentiabilité des itérées régulières et du logarithme itératif (c'est un résultat qui ne peut pas se déduire des résultats généraux de Kuczma [17] sur les équations fonctionnelles à données de classe $\mathcal{C}^{\infty}$).

Chapitre II : Nous étudions la théorie itérative dans certains sous-groupes remarquables de $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ (incluant les classes de Gevray).

Chapitre III : On montre que pour chaque f de $\mathcal{G}_k$, l'équation (en f_*) :

$f_* \circ f(z) = f'(z)\, f_*(z)$ qui est liée à l'équation d'Abel :

$A \circ f(z) = K + A(z)$, et qui n'admet pas en général de solution f_* "globale", c'est-à-dire holomorphe au voisinage de 0, admet néanmoins toujours $2p$(**) solutions f_{*j} holomorphes sur $2p$ domaines canoniques $\mathcal{U}_j(f)$ $(j=1,2,\dots 2p)$ disposés autour de l'origine. Nous montrons que f_{*j} admet en 0 sur $\mathcal{U}_j(f)$ un développement asymptotique (indépendant de j). Nous construisons ensuite la théorie itérative dans $\mathcal{G}_k$. Nous indiquons diverses classes de f non itérables pour tout w (i.e. : $f \notin I\,\mathcal{G}_k$) et nous montrons que $I\,\mathcal{G}_k$ n'est pas

---

(**) p : entier lié à f et dit "valuation itérative" de f.

(*) : reportées à la fin de l'ouvrage.

stable par composition.

Chapitre IV : Nous étudions la stabilité des ensembles $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *par rapport à la composition et avons recours pour cela à une forme explicite de la formule de Campbell-Hausdorff. Au § 1 nous montrons la fermeture par rapport à la composition de* $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *pour toute une vaste classe de suites* $\{\Gamma_n\}$. *Au § 2 au contraire nous montrons que pour une autre classe de suites* $\{\Gamma_n\}$ *(tout aussi vaste, et incluant la classe "holomorphe"* $\{1\}$*) le composé de deux éléments de* $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *n'est, en un certain sens, "presque jamais" dans* $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$.
Enfin au § 3 nous donnons une variante beaucoup plus forte de ce résultat général dans le cas particulier de la classe "holomorphe".

3) APERCU SUR LA PARTIE B (Théorie des invariants holomorphes).

Chapitre I : Nous posons le problème : pour chacun des groupes G *étudiés ci-avant, rechercher les systèmes d'invariants* $\{I_i\}$ $(i \in J$; J *= ensemble d'indices) complets*(*)*, c'est-à-dire tels que l'on puisse énoncer : « une C. N. S. pour que deux éléments* f *et* g *de* G *soient conjugués par rapport à un automorphisme* σ *du groupe* G *est que :* $I_i(f) = I_i(g)$; $\forall i \in J$ »

Puis on résout les cas des groupes $\tilde{\mathcal{G}}$ *et* $\tilde{\mathcal{H}}$.

Chapitre II : (chapitre crucial). On construit des systèmes libres et complets d'invariants sur $\mathcal{G}_k$ *(dits "invariants holomorphes") et on les applique à la solution de nombreux problèmes classiques.*

Chapitre III : On étudie les invariants holomorphes scalaires sur $\mathcal{G}_k$ *comme fonctions entières d'une infinité dénombrable de variables complexes* (h_n)*, où* (h_n) *est une suite de complexe paramétrant les éléments* f *de* $\mathcal{G}_k$ *(par exemple : la suite des coefficients de Taylor en* 0 *de* f *).*

(*) *et si possible libres.*

Chapitre IV : On étudie les systèmes complets et libres d'invariants mixtes (et surtout : binaires) sur $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ (ou : invariants mixtes formels).

4) ETAT DE LA QUESTION ANTERIEUREMENT AU PRESENT TRAVAIL.

(On trouvera en fin d'ouvrage la liste des principaux auteurs qui s'étaient occupés de la question).

Les résultats antérieurs étaient minces ; il nous semble que les logarithmes itératifs sectoriels des éléments de $\mathcal{G}_k$ (absolument essentiels pour la construction des invariants holomorphes) et a fortiori les invariants holomorphes eux-mêmes, étaient absolument inconnus. Le problème des C. N. S. pour que deux transformations holomorphes en 0 :

$$\begin{cases} z \longrightarrow f(z) = z + a_1 z^2 + \dots \\ z \longrightarrow g(z) = z + b_1 z^2 + \dots \end{cases}$$

soient transmutées, la seconde de la première, par rapport à un changement de variable holomorphe $z \longrightarrow Z = h(z)$ (i.e. $f \circ h = h \circ g$) - ce problème, donc, avait été posé, mais il n'en existait aucune solution, aussi partielle fût-elle. Bien entendu, tout l'immense sujet de l'étude des invariants holomorphes comme fonctions entières d'une infinité de variables complexes, est entièrement inédit. Il en est de même, croyons-nous, du chapitre sur les invariants mixtes de $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$

En ce qui concerne la théorie itérative proprement dite, on trouve chez Jabotinski, N. Baker, Kuczma des notions équivalentes à notre logarithme itératif f_*, mais seulement dans le cas "formel" des groupes $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ — cas de peu d'intérêt. Ces auteurs avaient aussi remarqué que les éléments f de $\mathcal{G}_k$ n'ont pas toujours de logarithme itératif holomorphe en 0, mais ils ne connaissaient pratiquement aucun critère d'existence ou de non-existence. Surtout, ils ignoraient la notion de logarithme itératif sectoriel f_{*j} (Voir partie A, III), notion indispensable au développement ultérieur de la théorie

En outre, dans [17] Kuczma demandait si le groupe W_f des ordres d'itération admissibles d'un élément f de $\mathcal{G}_k$ pouvait être $\neq \mathbb{C}$ et en même temps être $\not\subset \mathbb{R}$. Nous démontrons (en A, III, § 4) que c'est impossible.

Baker anonçait dans [3] la parution d'une thèse de Ran, destinée à montrer, sur un exemple particulier l'existence de paires (f, g) d'éléments de $\mathcal{G}_k$, pleinement itérables, mais de composé $f \circ g$ non pleinement itérable. Nous montrons qu'en réalité le fait est absolument général ; c'est l'objet du chapitre IV de la partie A et des théorèmes d'"extrémalité" (faible et forte).

5) QUELQUES QUESTIONS OUVERTES. (Voir aussi la Conclusion).

Bornons-nous à en énumérer quelques-unes :

a) Préciser la nature des extensions successives des groupes $\mathcal{G}_a$ et $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$, introduits dans la Conclusion.
Dégager la notion d'extension d'ordre transfini. Type de croissance des coefficients de Taylor des développements asymptotiques en 0 des éléments de ces extensions transfinies. La plupart de ces problèmes semblent extrêmement ardus ; la décidabilité de certains d'entre eux paraît même douteuse.

b) Préciser les théorèmes d'"extrémalité" de (A, IV) dans le sens : "presque partout" $\longrightarrow$ "partout".
Etudier les ensembles $(I\mathcal{G}_k)^{\circ n} = (I\mathcal{G}_k) \circ (I\mathcal{G}_k) \circ \dots (I\mathcal{G}_k)$ (n fois) et leurs propriétés d'"extrémalité" dans $\mathcal{G}_k$ (etc ...).

c) Donner des exemples plus explicites de fonctions $\Pi_f(\varepsilon, k, w)$.
Etudier la liberté des systèmes $\{\ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)\}$ et $\{\dddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)\}$ de $\mathcal{G}_k$. Approfondir l'étude des $\ddot{\Pi}_f$ et $\dddot{\Pi}_f$ comme fonctions entières d'une infinité de variables complexes. (etc, etc ...).

d) Faire la liaison avec les invariants de la forme $J(f)$ avec $J(f) = \inf_{h \in \mathcal{H}_k} H(h, f)$, où H est une fonction de la suite des coefficients *de Taylor en* O *de* $h^{\circ(-1)} \circ f \circ h$ $\left(h \textit{ holomorphe, } h(0)=0, h^{\circ(-1)} \circ h(z) \equiv z \right)$

e) Etudier la théorie des invariants dans les groupes $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *de transformations quasi analytiques* $\left(\textit{peut-être sous la forme } \mathcal{T}(f) \textit{ ?}\right)$. *La question semble très délicate, essentiellement à cause de l'absence de notion généralisant les logarithmes sectoriels* f_{*j} *et* f_{*j+1} *avec leurs domaines de définition se recouvrant partiellement (etc, etc ...).*

P A R T I E   A

T H E O R I E   I T E R A T I V E

CHAPITRE I

LA THEORIE ITERATIVE DANS LES GROUPES $\tilde{\mathcal{G}}$ ET $\tilde{\mathcal{H}}$ ET DANS LES SEMI-GROUPES $\hat{\mathcal{G}}^{\pm}$ ET $\hat{\mathcal{H}}^{\pm}$.

§ I : LA THEORIE ITERATIVE DANS $\tilde{\mathcal{G}}$:

Dans toute la suite, les symboles ordinaires : f , F , φ , Φ ... *désigneront des fonctions ; les mêmes symboles, surmontés d'une tilde :* $\tilde{f}$, $\tilde{F}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Phi}$ ... *désigneront des "développements", c'est-à-dire par définition des séries formelles de la variable* z *, comportant éventuellement un nombre fini de puissances négatives de* z *:*

$$(1) \qquad \tilde{F}(z) = \sum_{n \geq p} a_{n-1} z^{n} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{p-1} \neq 0 .$$

L'entier p *sera dit "valuation de* $\tilde{F}$ *". Les symboles de Landau* $\tilde{o}(z^p)$, $\tilde{O}(z^p)$ *et* $\underline{\tilde{O}}(z^p)$ *désigneront respectivement des développements du type (1) et de valuation* $> p$, $\geq p$ *et* $= p$.
Dans un développement du type (1), le coefficient de z^n *sera généralement affecté de l'indice* $(n-1)$ *, pour des raisons d'homogénéité qui apparaîtront plus loin. On appliquera aux développements les opérations ordinaires, en particulier la dérivation formelle.* $\tilde{F}(0)$ *désignera le terme constant du développement* $\tilde{F}(z)$ *et si* $\tilde{G}(z) = \tilde{O}(z)$, $\tilde{F} \circ \tilde{G}$ *désignera la série obtenue en*

substituant $\tilde{G}(z)$ *à* z *dans* $\tilde{F}(z)$.

Définition I : $\tilde{\mathcal{K}}$ *désigne le groupe des développements* $\tilde{f}$ *de valuation 1, à coefficients complexes :*

$$\tilde{f}(z) = a_0 z + a_1 z^2 + \dots \;, \quad \tilde{f}'(0) = a_0 \neq 0 .$$

La loi de groupe est la substitution notée " $\circ$ *", lue "rond".*
$\tilde{\mathcal{H}}$ *(resp.* $\tilde{\mathcal{G}}$*) désigne le sous-groupe de* $\tilde{\mathcal{K}}$ *formé des* $\tilde{f}$ *tels que* $\tilde{f}'(0) > 0$ *(resp.* $\tilde{f}'(0) = 1$*).*

$\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ *et* $\tilde{\mathcal{G}}$ *sont munis de la topologie* $\tilde{\mathcal{C}}$ *de la convergence simple des coefficients.*

Si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ *ou* $\tilde{\mathcal{G}}$*, l'entier* p *tel que* $\tilde{f}(z) = z + \underline{\tilde{O}}(z^{p+1})$ *sera par définition la "valuation itérative de* $\tilde{f}$ *" et on le notera : "valit* $\tilde{f}$ *"*
On démontre que tout automorphisme de $\tilde{\mathcal{K}}$*, de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *ou de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *est soit de la forme*

$$(2) \qquad \tilde{f} \rightarrow {}^{c}\tilde{h} . \tilde{f} = \tilde{k} \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}$$

soit de la forme

$$(3) \qquad \tilde{f} \rightarrow {}^{c}\tilde{h} . C . \tilde{f} = \tilde{k} \circ (C\tilde{f}) \circ \tilde{h}$$

où $\tilde{h}$ *et* $\tilde{k}$ *sont deux éléments de* $\tilde{\mathcal{K}}$ *inverses l'un de l'autre et où* C *désigne l'opérateur effectuant la conjugaison complexe des coefficients :*

$$C . \tilde{f} = \overline{(\tilde{f})} .$$

Les automorphismes de la forme (2) seront dits automorphismes primaires (de $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ *ou* $\tilde{\mathcal{G}}$*).*

Les §§ 1 et 2 du présent chapitre constituent un rappel rapide de quelques résultats démontrés dans notre [11] *. Ils développent la théorie itérative dans les groupes* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et* $\tilde{\mathcal{H}}$ *et servent d'introduction au présent travail.*

<u>*Théorème 1*</u> : $\tilde{f}$ *désigne ici l'élément générique de* $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\tilde{f}(z) = z + \sum_{n \geq p} a_n z^{n+1} \; ; \; p = \text{valit}\, \tilde{f} \; ; \; p \geq 1 \text{ et } \leq \infty .$$

a) Il existe une application unique $(w, \tilde{f}) \to \tilde{f}^{ow}$ *de* $\mathbb{C} \times \tilde{\mathcal{G}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *telle que :*

(α) $\tilde{f}^{ou} \circ \tilde{f}^{ov} = \tilde{f}^{o(u+v)}$ $\forall u, v \in \mathbb{C}$ $\quad(\beta)$ $\tilde{f}^{o1} = \tilde{f}$

(γ) $\forall m \in \mathbb{N}$, *l'application* $w \to \frac{d^m}{dz^m} \tilde{f}^{ow}(0)$ *est continue.*

$\tilde{f}^{ow}$ *est dite "itérée complexe" d'ordre* w *de* $\tilde{f}$.

b) Si $p < \infty$ *et si on pose :* $\tilde{f}^{ow}(z) = z + \sum_{n \geq 1} a_n(w)\, z^{n+1}$,

(α) $a_n(w)$ *est un polynôme en* w ; $a_1(w) \equiv a_2(w) \equiv \ldots a_{p-1}(w) \equiv 0$;

$a_p(w) = w\, a_p$; *enfin, le polynôme* $a_n(w)$ *est de degré* $\leq n/p$ *et* $a_n(0) = 0$.

(β) $\tilde{f}^{o0}(z) = z$ *et* $\tilde{f}^{o(-1)}$ *est l'inverse de* $\tilde{f}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$.

En outre, $\forall u, v \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{f}^{ou} \circ \tilde{f}^{ov} = \tilde{f}^{o(u+v)} \quad \text{et} \quad \left(\tilde{f}^{ou}\right)^{ov} = \tilde{f}^{o(uv)}.$$

(γ) *L'application* $(w, \tilde{f}) \to \tilde{f}^{ow}$ *de* $\mathbb{C} \times \tilde{\mathcal{G}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *est continue (lorsqu'on munit* $\tilde{\mathcal{G}}$ *de la topologie* $\tilde{\mathcal{E}}$).

c) On pose $\tilde{f}_* = \left(\frac{\partial}{\partial w} \tilde{f}^{ow}\right)_{w=0}$ *et on appelle le développement* $\tilde{f}_*$: *"logarithme itératif de* $\tilde{f}$ *" (En abrégé :* $\tilde{f}_* = \text{logit}\, \tilde{f}$).

$\tilde{f}_*$ *est caractérisé par les propriétés* $(\alpha) + (\beta)$

(α) $\quad \tilde{f}_* \circ \tilde{f} = \tilde{f}_* \, \tilde{f}'$

(β) $\quad \tilde{f}_*(z) = \tilde{f}(z) - z + \tilde{o}(z^{p+1})$

De plus : $\forall w \in \mathbb{C}$: $\quad \frac{\partial}{\partial w} \tilde{f}^{ow} = \tilde{f}_* \circ \tilde{f}^{ow} = \tilde{f}_* \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}^{ow}$.

d) On désigne par ρ *le coefficient de* z^{-1} *dans le développement* $1/\tilde{f}_*(z)$

On appelle ρ *le "résidu itératif de* $\tilde{f}$ *". (En abrégé :* $\rho = \text{résit}\, \tilde{f}$).

e) On désigne par $\tilde{f}^*$ *le développement généralisé de la forme*

$\tilde{f}^*(z) = \rho \log z + \tilde{F}(z)$, *où* $\tilde{F}$ *est le développement (au sens* ordinaire) caractérisé par les conditions :

$$\tilde{F}(z) = \underset{=}{\tilde{O}}(z^{-1}) \quad , \quad \tilde{F}(0) = 0 \quad , \quad \rho z^{-1} + \tilde{F}'(z) = 1/\tilde{f}_*(z) \, .$$

On appelle $\tilde{f}^*$ "itérateur de $\tilde{f}$ ". Pour tout $w \in \mathbb{C}$:

$$(i) \quad \tilde{f}^* \circ \tilde{f}^{\circ w} = w + \tilde{f}^* \qquad (**)$$

$\tilde{f}^*$ est caractérisé par (i) à une constante additive près.

f) Pour tout automorphisme ${}^c\tilde{h}$ primaire de $\tilde{\mathcal{G}}$ $(\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{K}})$

on a :

(α) $({}^c\tilde{h} \, . \, \tilde{f})^{\circ w} = {}^c\tilde{h} \, . \, \tilde{f}^{\circ w}$ (Autrement dit, l'itération complexe est permutable avec tout automorphisme primaire de $\tilde{\mathcal{G}}$).

$$(\beta) \quad ({}^c\tilde{h} \, . \, \tilde{f})_* = \tilde{f}_* \circ \tilde{h} \, / \, \tilde{h}' \, .$$

$$(\gamma) \quad ({}^c\tilde{h} \, . \, \tilde{f})^* = C\text{ste} + \tilde{f}^* \circ \tilde{h} \, .$$

<u>Définition 2</u> : On désigne par $\tilde{\mathcal{E}}$ l'algèbre topologique formée de tous les développements $\tilde{\varphi}$ de valuation $> -\infty$ (pour l'addition et la multiplication ordinaires, et pour la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$). A tout élément $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ on associe deux automorphismes continus de $\tilde{\mathcal{E}}$, notés $T_{\tilde{f}}$ et $A_{\tilde{f}}$, et définis par :

$$(\alpha) \quad T_{\tilde{f}} \, . \, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{f} \qquad\qquad (\beta) \quad A_{\tilde{f}} \, . \, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{f} \, / \, \tilde{f}' \, .$$

Par l'intermédiaire des $T_{\tilde{f}}$ et des $A_{\tilde{f}}$ le groupe $\tilde{\mathcal{G}}$ opère doublement dans $\tilde{\mathcal{E}}$. On note toutefois l'inversion de l'ordre : $T_{\tilde{f}} \, . \, T_{\tilde{g}} = T_{(\tilde{g} \circ \tilde{f})}$ et $A_{\tilde{f}} \, . \, A_{\tilde{g}} = A_{(\tilde{g} \circ \tilde{f})}$.

Pour tout $\tilde{f}$ fixe, et w variable, les $T_{\tilde{f}^{\circ w}}$ et les $A_{\tilde{f}^{\circ w}}$ forment deux groupes, à 1 paramètre, d'automorphisme de $\tilde{\mathcal{E}}$, dont les générateurs infinitésimaux sont, respectivement :

$$\left\{ \tilde{f}_* \frac{d}{dz} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{f}_* \frac{d}{dz} - \tilde{f}'_* \right\} .$$

(**) Ici, et dans toute la suite, la substitution de $\tilde{f}^{\circ w}(z) = z\,(1 + \tilde{X}(z))$ dans $\log z$ doit s'entendre de la manière naturelle :

$$\log \tilde{f}^{\circ w}(z) = \log z + \tilde{X}(z) - 1/2 \; \tilde{X}^2(z) + \ldots$$

Définition 3 : Pour toute paire $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{E}}$, on définit leur "crochet de Lie" $[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]$ par :

$$[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] = \tilde{\varphi}'\tilde{\psi} - \tilde{\psi}'\tilde{\varphi} \ .$$

Cette opération bilinéaire anticommutative vérifie bien l'identité de Jacobi et munit $\tilde{\mathcal{E}}$ d'une structure supplémentaire d'algèbre de Lie. En outre :

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial w} A_{\tilde{f}^{\circ w}} \cdot \tilde{\varphi}\right)_{w=0} = [\tilde{\varphi}, \tilde{f}_*]$$

$$(5) \quad A_{\tilde{f}} \cdot [\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] = [A_{\tilde{f}} \cdot \tilde{\varphi}, A_{\tilde{f}} \cdot \tilde{\psi}] \ .$$

Donc $A_{\tilde{f}}$ est un automorphisme de $\tilde{\mathcal{E}}$, pour la structure d'algèbre de Lie:

Théorème 2 : On désigne par $\tilde{\mathcal{E}}_q$, la sous-algèbre de Lie de $\tilde{\mathcal{E}}$ formée des éléments de valuation $\geq q \geq 1$.
(Cela a un sens car $[\tilde{\mathcal{E}}_q, \tilde{\mathcal{E}}_q] \subset \tilde{\mathcal{E}}_{2q-1}$).
Alors :

a) L'algèbre de Lie $L\tilde{\mathcal{G}}$ du groupe $\tilde{\mathcal{G}}$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{E}}_2$.
La correspondance entre $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}_2$ est : $\tilde{f} \to \tilde{f}_* = \text{logit}\, \tilde{f}$.
Elle est biunivoque et donc globale sur tout $\tilde{\mathcal{G}}$.
Par cette correspondance $\tilde{\mathcal{G}} \rightleftarrows \tilde{\mathcal{E}}_2$, la loi de groupe "o" de $\tilde{\mathcal{G}}$ se trouve transmutée en une loi interne sur $\tilde{\mathcal{E}}_2$, notée $\#$: $(\tilde{f} \circ \tilde{g})_* = \tilde{f}_* \# \tilde{g}_*$
La loi $\#$ s'exprime directement dans $\tilde{\mathcal{E}}_2$ au moyen de la formule de Campbell-Hansdorff :

$$\tilde{f}_* \# \tilde{g}_* = \tilde{f}_* + \tilde{g}_* + 1/2\ [\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] + \dots$$

(Voir (A, IV, §§ 1 et 2)).

b) Les opérateurs $T_{\tilde{f}}$, $T_{\tilde{f}^{\circ w}}$ et $\tilde{f}_* \frac{d}{dz}$ (de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$) sont liés entre eux par les relations :

$$(\alpha)\quad T_{\tilde{g}^{\circ w}} = 1 + \sum_{n\geq 1} C_w^n \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \, T_{\tilde{g}^{\circ(n-p)}} \right)$$

$$(\beta)\quad T_{\tilde{g}^{\circ w}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{w^n}{n!} \left(\tilde{g}_* \frac{d}{dz} \right)^n$$

$$(\gamma)\quad \tilde{g}_* \frac{d}{dz} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \, T_{\tilde{g}^{\circ(n-p)}} \right)$$

où l'on pose $C_w^n = \dfrac{w(w-1)\dots(w-n+1)}{n!}$ *pour tout* $w \in \mathbb{C}$.

Autrement dit, pour tout $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{E}}$, *on aura par exemple :*

$$(\alpha')\quad \tilde{\varphi}\circ\tilde{g}^{\circ w}(z) = \tilde{\varphi}(z) + w\left(\tilde{\varphi}\circ\tilde{g}(z) - \tilde{\varphi}(z)\right) + w(w-1)/2\left(\tilde{\varphi}\circ\tilde{g}\circ\tilde{g}(z) - 2\,\tilde{\varphi}\circ\tilde{g}(z) + \tilde{\varphi}(z)\right)\dots$$

$$(\beta')\quad \tilde{\varphi}\circ\tilde{g}^{\circ w}(z) = \tilde{\varphi}(z) + w\,\tilde{g}_*(z)\,\tilde{\varphi}'(z) + w^2/2\;\tilde{g}_*(z)\left\{\tilde{g}_*'(z)\,\tilde{\varphi}'(z) + \tilde{g}_*(z)\,\tilde{\varphi}''(z)\right\}\dots$$

N. B. dans ces relations, comme dans celles qui suivent, la convergence (pour la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$ *) des seconds membres ne pose aucune difficulté d'interprétation, puisque ces mêmes seconds membres (comme on le vérifie dans chacun des cas) ne comportent qu'un nombre fini de termes de valuation inférieure à tout entier donné.*

c) En particulier, en appliquant les opérateurs entrant dans les relations $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ *à* $\tilde{\varphi}(z) = z$, *on trouve :*

$$(\alpha'')\quad \tilde{g}^{\circ w}(z) = z + \sum_{n\geq 1} C_w^n \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \, \tilde{g}^{\circ(n-p)}(z) \right).$$

$$(\beta'')\quad \tilde{g}^{\circ w}(z) = z + \sum_{n\geq 1} w^n/n! \, \left(\tilde{g}_* \, d/dz \right)^n . z .$$

$$(\gamma'')\quad \tilde{g}_*(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}/n \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \, \tilde{g}^{\circ(n-p)} \right).$$

d) Enfin, $A_{\tilde{g}}$ *est dans l'algèbre de Lie* $L\tilde{\mathcal{G}} \equiv \tilde{\mathcal{E}}_2$, *l'opérateur adjoint de l'élément* $\tilde{g}$ *du groupe* $\tilde{\mathcal{G}}$, *et pour toute paire* $(\tilde{g}, \tilde{h})$ *d'éléments de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *on a :* $\left(\tilde{h}^{\circ(-1)}\circ\tilde{g}\circ\tilde{h}\right)_* = A_{\tilde{h}} \cdot \tilde{g}_*$

En outre, il existe un équivalent, dans ce cas, pour chacune des relations $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ *ci-dessus ; équivalent qu'on obtient en remplaçant simultanément* $T_{\tilde{g}}$ *par* $A_{\tilde{g}}$ *et le générateur infinitésimal* $\left\{\tilde{g}_* \, d/dz\right\}$ *des* $T_{\tilde{g}^{\circ w}}$

par le générateur infinitésimal $\left\{ \tilde{f}_* \, d/_{dz} - \tilde{f}' \right\}$ des $A_{\tilde{f}}^{\,ow}$.

Théorème 3 : Une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ commutent $\left(\text{i.e. } \tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}\right)$ est qu'il existe un complexe w tel que l'un deux soit itéré d'ordre w de l'autre.

On rappelle qu'on nomme résidu itératif d'un $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ (résit $\tilde{f}$) le coefficient de z^{-1} dans le développement $\left(\tilde{f}_*\right)^{-1} = \left(\text{logit } \tilde{f}\right)^{-1}$.
Alors :

Théorème 4 : Le résidu itératif est invariant pour les automortphismes primaires de $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\text{résit}\left({}^c\tilde{h} \,.\, \tilde{f}\right) = \text{résit}\,\tilde{f} \text{ pour tout } \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}} \text{ et tout } \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ soient conjugués par rapport à (au moins) un élément $\tilde{h}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ est que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{valit}\,\tilde{f} = \text{valit}\,\tilde{g} \\ \text{résit}\,\tilde{f} = \text{résit}\,\tilde{g} \end{cases}$$

§ 2 : LA THEORIE ITERATIVE DANS $\tilde{\mathcal{H}}$:

Le groupe $\tilde{\mathcal{H}}$, et la valuation itérative de ses éléments, ont été définis en (A, I, 1). (Voir déf. 1). L'ensemble des $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ tels que valit $\tilde{f} \geqslant 1$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{G}}$.

Si valit $\tilde{f} = 0$, alors $\tilde{f}'(0) > 0$, $\tilde{f}'(0) \neq 1$ et on pose $\rho = \alpha^{-1} = \left(\log \tilde{f}'(0)\right)^{-1}$. ρ est appelé "résidu itératif de $\tilde{f}$ " (en abrégé : ρ = résit $\tilde{f}$).

Comme dans $\tilde{\mathcal{G}}$, on peut construire dans $\tilde{\mathcal{H}}$ une "itération fractionnaire" naturelle, à condition toutefois de se restreindre aux ordres d'itéra-

tion réels. Néanmoins, le comportement des $\tilde{f}$ *de valuation itérative nulle sera très différent de celui des* $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$ *, du fait de la présence du coefficient* $a_0 = \tilde{f}'(0) \neq 1$ *, coefficient dit "sans dimension".*

<u>Théorème 5</u> : $\tilde{f}$ *désigne ici l'élément générique de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *; et on pose* $\mu =$ *valit* $\tilde{f}$ *,* $\rho =$ *résit* $\tilde{f}$ *,* $\tilde{f}'(0) = a > 0$.

a) il existe une application unique $(w, \tilde{f}) \to \tilde{f}^{\circ w}$ *de* $\mathbb{R} \times \tilde{\mathcal{H}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$ *telle que :*

(α) $\tilde{f}^{\circ u} \circ \tilde{f}^{\circ v} = \tilde{f}^{\circ(u+v)} \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}$

(β) $\tilde{f}^{\circ 1} = \tilde{f}$

(γ) $\forall m \in \mathbb{N}$ *, l'application :* $w \to \frac{d^m}{dz^m} \tilde{f}^{\circ w}(0)$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$.

b) On pose $\tilde{f}^{\circ w}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(w)\, z^{n+1}$.

Alors, si $\mu =$ *valit* $\tilde{f} = 0$ *:*

$\alpha)$ $a_n(w)$ *est un polunôme en* a^w *de degré* $(n+1)$.

En particulier $a_0(w) = a^w$

$\beta)$ $\tilde{f}^{\circ 0}(z) = z$ *et* $\tilde{f}^{\circ(-1)}$ *est l'inverse de* $\tilde{f}$ *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$.

En outre, $\forall u, v \in \mathbb{R}$: $\left(\tilde{f}^{\circ u}\right)^{\circ v} = \tilde{f}^{\circ(uv)}$

$\gamma)$ *l'application* $(w, \tilde{f}) \to \tilde{f}^{\circ w}$ *de* $\mathbb{R} \times \tilde{\mathcal{H}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$ *est continue.*

c) On pose $\tilde{f}_* = \left(\frac{\partial}{\partial w} \tilde{f}^{\circ w}\right)_{w=0}$ *et on appelle le développement* $\tilde{f}_*$ *"logarithme itératif" de* $\tilde{f}$ *(En abrégé :* $\tilde{f}_* =$ *logit* $\tilde{f}$ *) et on désigne, comme en I, §1, par* $\tilde{f}^*$ *le développement généralisé de la forme* $\rho \log z + \tilde{F}(z)$

avec $\tilde{F}(0) = 0$ *et* $\rho z^{-1} + \tilde{F}'(z) = \left(\tilde{f}_*(z)\right)^{-1}$

$\tilde{f}^*$ *est dit "itérateur de* $\tilde{f}$ *".*

Enfin, dans le cas où $\mu =$ *valit* $\tilde{f} = 0$*, on désigne par* $\tilde{f}^{**}$ *("préitérateur" de* $\tilde{f}$ *) l'élément unique de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *tel que* $\left(\tilde{f}^{**}\right)\left(\frac{d}{dz}\tilde{f}^{**}\right)^{-1} = \rho\, \tilde{f}_*$

et on désigne par ${}^{**}\tilde{f}$ l'inverse de $\tilde{f}^{**}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$.

Alors pour tout w réel :

(α) $\tilde{f}^{*} \circ \tilde{f}^{ow} = w + \tilde{f}^{*}$

(β) $\frac{\partial}{\partial w}\tilde{f}^{ow} = \tilde{f}_{*} \circ \tilde{f}^{ow} = \tilde{f}_{*} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}^{ow}$

(γ) si $\mu = 0$: $\tilde{f}^{ow}(z) = {}^{**}\tilde{f}\left(a^{w}\, \tilde{f}^{**}(z)\right)$

La relation (α) $\left(\text{resp } (\beta), (\gamma)\right)$ caractérise $\tilde{f}^{*}$ $\left(\text{resp } \tilde{f}_{*}, \tilde{f}^{**}\right)$ compte tenu des conditions $\tilde{f}^{*}(0) = 0$ $\Big($resp : $\tilde{f}_{*}(z) \sim \tilde{f}(z) - z$ si $\mu \geqslant 1$; $\tilde{f}_{*}(z) = \left(\log \tilde{f}'(0)\right) z + \tilde{o}(z)$ si $\mu = 0$ et $\left(\tilde{f}^{**}\right)'(0) = 1\Big)$.

d) Pour tout $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}$:

(α) $\left({}^{c}\tilde{h} . \tilde{f}\right)^{ow} = {}^{c}\tilde{h} . \tilde{f}^{ow}$.

Donc, l'itération générale ou "réelle" dans $\tilde{\mathcal{H}}$ est permutable avec tous les automorphismes primaires de $\tilde{\mathcal{H}}$.

(β) $\left({}^{c}\tilde{h} . \tilde{f}\right)_{*} = \tilde{f}_{*} \circ \tilde{h} / \tilde{h}'$

(γ) $\left({}^{c}\tilde{h} . \tilde{f}\right)^{*} = C^{ste} + \tilde{f}^{*} \circ \tilde{h}$

(δ) $\left({}^{c}\tilde{h} . \tilde{f}\right)^{**} = \tilde{f}^{**} \circ \tilde{h}$

Ensuite, pour tout élément $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ (et non plus nécessairement de $\tilde{\mathcal{G}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$) on définit encore les automorphismes $T_{\tilde{f}}$ et $A_{\tilde{f}}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ comme précédemment. (Voir déf. 2). On peut alors énoncer le théorème suivant, analogue au théorème 2, quoique affaibli. $\big($ $\tilde{f}_{*} \# \tilde{g}_{*}$ n'admet plus toujours de développements convergents selon $\tilde{\mathcal{E}}$, et la plupart des relations du théorème 2, b) c) n'ont pas d'équivalents simples$\big)$.

<u>Théorème 6</u> : On désigne par $\tilde{\mathcal{E}}_{in}$, la sous algèbre de Lie de $\tilde{\mathcal{E}}$ dont les éléments sont de la forme :

$\tilde{\varphi}(z) = \tilde{O}(z)$; $\tilde{\varphi}'(0)$ réel.

a) L'algèbre de Lie $L\tilde{\mathcal{H}}$ du groupe $\tilde{\mathcal{H}}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{E}}_{1r}$ et l'application $\tilde{f} \to$ logit $\tilde{f} = \tilde{f}_*$ est biunivoque de $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_{1r}$.
Par cette correspondance $\tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{E}}_{1r}$, la loi $\circ$ du groupe $\tilde{\mathcal{H}}$ se trouve transmutée en une loi interne sur $\tilde{\mathcal{E}}_{1r}$, notée $\#\left(i.e. (\tilde{f}\circ\tilde{g})_* = \tilde{f}_* \# \tilde{g}_*\right)$.
Dans le cas où inf $\left(\text{valit } \tilde{f}, \text{valit } \tilde{g}\right) = 1$, $\tilde{f}_* \# \tilde{g}_*$ ne s'exprime pas au moyen de là formule de Campbell -Hausdorff : celle-ci fournit une série qui ne converge pas pour $\tilde{\mathcal{C}}$ en général.
Toutefois, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left\{ \frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n} \left(\tilde{f}^{\circ u} \circ \tilde{g}^{\circ v}\right)_* \right\}_{u=0,\, v=0} = \tilde{h}_{m,n}$$

où $\tilde{h}_{m,n}$ est la somme des termes (en nombre fini) de la formule de Campbell-Hausdorff, qui sont m-linéaires en $\tilde{f}_*$ et n-linéaires en $\hat{g}_*$.
b) Si $\tilde{f}'(0) = a > 1$ (resp. si $a < 1$) le préitérateur $\tilde{f}^{**}$ de $\tilde{f}$ est donné par la formule :

$$(\alpha) \qquad \tilde{f}^{**} = \lim_{n \to +\infty} a^n \, \tilde{f}^{\circ(-n)}$$

$$\left(\text{resp.}: \quad (\beta) \qquad \tilde{f}^{**} = \lim_{n \to +\infty} a^{-n} \, \tilde{f}^{\circ n} \right)$$

La convergence doit s'entendre au sens de la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$.

<u>Théorème 7</u> :

a) Une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ commutent est qu'il existe un w, réel ou complexe, tel que l'un des deux soit itéré d'ordre w de l'autre.

b) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un élément $\hat{h}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ conjuguant deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ (i.e. $\tilde{f}\circ\hat{h} = \hat{h}\circ\tilde{g}$) est que l'on ait :

valit $\tilde{f}$ = valit $\tilde{g}$; résit $\tilde{f}$ = résit $\tilde{g}$.

§ 3 : LA THEORIE ITERATIVE DANS LES SEMI-GROUPES $\hat{\mathcal{G}}_{\pm}$ et $\hat{\mathcal{H}}_{\pm}$:

On désigne par $\mathcal{E}_0 = \bigcup_{T>0} \mathcal{C}^{\infty}_{[0T]}$ *l'algèbre des fonctions* φ *réelles, définies et indéfiniment différentiables sur un certain segment* $[0T_\varphi]$ $(T_\varphi > 0)$ *, et par* $\mathcal{E}$ *l'algèbre des fonctions de la forme* $t^m \varphi(t)$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}_0$ *. On note bien que pour toute* φ *de* $\mathcal{E}$ *, on exige en particulier l'indéfinie différentiabilité en 0, à droite, de* $t^n \varphi(t)$ *pour tout entier* n *assez grand.*

On désigne par $\hat{\mathcal{E}}$ *et* $\hat{\mathcal{E}}_0$ *les algèbres des germes de fonctions de* $\mathcal{E}$ *, resp.* $\mathcal{E}_0$ *.*

On définit ensuite un homomorphisme unique, noté : $\sim$ *:* $\varphi \to \tilde{\varphi}$ *de* $\mathcal{E}$ *dans* $\tilde{\mathcal{E}}$ *(Voir la définition de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *: § I, déf. 2) par les conditions*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(z) = \sum_{m \geq 0} 1/m! \left(d^m/dt^m \, \varphi(0) \right) z^m & \text{si } \varphi \in \mathcal{E}_0 \\ \widetilde{(t^n \varphi)} = z^n \tilde{\varphi} & \text{pour tout } \varphi \text{ de } \mathcal{E} \text{ et tout entier } n . \end{cases}$$

Pour tout $\hat{\varphi}$ *élément de* $\hat{\mathcal{E}}$ *, et pour des représentants* φ_i *de* $\hat{\varphi}$ *dans* $\mathcal{E}$ *, l'élément* $\tilde{\varphi}_i$ *de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *ne dépend pas du choix du représentant* φ_i *. On le note simplement* $\tilde{\varphi}$ *, définissant ainsi un homomorphisme* $\hat{\varphi} \to \tilde{\varphi}$ *de* $\hat{\mathcal{E}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{E}}$

On désigne par $\hat{\mathcal{G}}$ *(resp.* $\hat{\mathcal{H}}$ *,* $\hat{\mathcal{K}}$ *) l'image réciproque des parties* $\tilde{\mathcal{G}}$ *(resp.* $\tilde{\mathcal{H}}$ *,* $\tilde{\mathcal{K}}$ *) de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *par l'homomorphisme* $\hat{\varphi} \to \tilde{\varphi}$ *.*

On munit $\hat{\mathcal{G}}$ *,* $\hat{\mathcal{H}}$ *et* $\hat{\mathcal{K}}$ *d'une structure de groupe naturelle en introduisant la composition des germes :* $(\hat{f}, \hat{g}) \to \hat{f} \circ \hat{g}$

Les applications $\hat{\varphi} \to \tilde{\varphi}$ *de* $\hat{\mathcal{G}}$ *,* $\hat{\mathcal{H}}$ *,* $\hat{\mathcal{K}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *,* $\tilde{\mathcal{H}}$ *,* $\tilde{\mathcal{K}}$ *sont des homomorphismes de groupes.*

Pour tout $\hat{f}$ *de* $\hat{\mathcal{G}}$ *ou de* $\hat{\mathcal{H}}$ *on pose :*

$$\text{valit } \hat{f} = \text{valit } \tilde{f} \quad ; \text{ résit } \hat{f} = \text{résit } \tilde{f} .$$

On dit qu'un germe $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{H}}$ appartient à $\hat{\mathcal{H}}_+$ (resp $\hat{\mathcal{H}}_-$) si $0 \leq p = \text{valit } \hat{f} < \infty$ et si $\tilde{f}(z) = z + a_p z^{p+1}$ avec $a_p > 0$ (resp $a_p < 0$)

On définit de même $\hat{\mathcal{G}}_+$ et $\hat{\mathcal{G}}_-$ et on remarque que $\hat{\mathcal{H}}_+$ et $\hat{\mathcal{H}}_-$ (resp $\hat{\mathcal{G}}_+$ et $\hat{\mathcal{G}}_-$) sont des semi-groupes (pour la loi o) mais que ni $\hat{\mathcal{H}}_+ \cup \hat{\mathcal{H}}_- \cup \{\hat{t}\}$ ni $\hat{\mathcal{G}}_+ \cup \hat{\mathcal{G}}_- \cup \{\hat{t}\}$ ne sont des sous-groupes de $\hat{\mathcal{H}}$ ou $\hat{\mathcal{G}}$.

On dira enfin que le germe $\hat{\varphi}_n$ (resp. $\hat{\varphi}_x$) converge vers le germe $\hat{\varphi}$ dans $\hat{\mathcal{G}}$ selon la topologie $\hat{\mathcal{C}}$ quand $n \to \infty$ (resp. $x \searrow x_0$) si il existe un intervalle $[OT]$ fixe $(T>0)$ et des représentants φ_n, φ_x et φ des germes ci-dessus, tels que pour tout entier m, la fonction :

$\varphi_n^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(t)$ (resp. $\varphi_x^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(t)$) converge uniformément sur $[OT]$ vers 0 lorsque $n \to \infty$ (resp. $x \searrow x_0$).

On tire de là une notion naturelle de dérivabilité (par rapport au paramètre x) du germe $\hat{\varphi}_x$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les principaux résultats de la théorie de l'itération"fractionnaire" dans les semi-groupes $\hat{\mathcal{G}}_\pm$ et $\hat{\mathcal{H}}_\pm$, sous forme des trois théorèmes suivants. Les démonstrations sont reportées à la fin de ce paragraphe.

<u>Théorème 8</u> : $\mathbb{R}^+$ désigne ici l'ensemble des réels >0 et $\hat{\mathcal{G}}_\pm$ (resp. $\hat{\mathcal{H}}_\pm$) l'un ou l'autre des semi-groupes $\hat{\mathcal{G}}_+$ et $\hat{\mathcal{G}}_-$ (resp. $\hat{\mathcal{H}}_+$ et $\hat{\mathcal{H}}_-$)

a) Il existe une application unique : $(w, \hat{f}) \to \hat{f}^{ow}$ de $\mathbb{R}^+ \times \hat{\mathcal{H}}_\pm$ dans $\hat{\mathcal{H}}_\pm$ et de $\mathbb{R}^+ \times \hat{\mathcal{G}}_\pm$ dans $\hat{\mathcal{G}}_\pm$ qui soit continue (pour la topologie $\hat{\mathcal{C}}$) et telle que pour tout w rationnel $(w = m/n)$ on ait :

$$\hat{f}^{ow} \circ \hat{f}^{ow} \cdots\cdots \circ \hat{f}^{ow} \text{ (n fois)} = \hat{f} \circ \hat{f} \cdots \circ \hat{f} \text{ (m fois)}.$$

b) *Cette application* $(w,\hat f)\to \hat f^{\circ w}$ *possède les propriétés suivantes (qui, ensemble, la caractérisent).*

(α) $\forall u,v\in\mathbb{R}^+$: $\hat f^{\circ u}\circ\hat f^{\circ v} = \hat f^{\circ(u+v)}$ et $(\hat f^{\circ u})^{\circ v} = \hat f^{\circ(uv)}$

(β) $\begin{cases} \text{si valit } \hat f = 0 \\ \log\left(\frac{d}{dt}\hat f^{\circ w}(0)\right) = w\log\left(\frac{d}{dt}\hat f(0)\right)\end{cases}$ $\begin{cases} \text{si valit } \hat f = p\geqslant 1 \\ \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}\hat f^{\circ w}(0) = w\,\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}\hat f(0)\end{cases}$

En outre :

(γ) $\hat f^{\circ w}\to \hat t$ *quand* $w\searrow 0$.

c) *On a l'identité (en* f *et* w *) :* $\widetilde{(\hat f^{\circ w})} = (\tilde f)^{\circ w}$

Autrement dit, l'itération "généralisée" dans les semi-groupes $\hat{\mathcal G}_\pm$ *et* $\hat{\mathcal H}_\pm$ *est permutable avec les homomorphismes (de semi-groupes) :* $\hat f\longrightarrow\tilde f$

d) *Pour tout* $w_0\in\mathbb R^+$ *l'application* $w\to\hat f_w$ *est dérivable en* w_0 *, et lorsque* $w_0\searrow 0$ *le germe* $\frac{\partial}{\partial w}\hat f_{w_0}$ *tend vers une limite, notée* $(\hat f)_*$ *, ou simplement* $\hat f_*$ *, ou encore logit* $\hat f$ *(i.e. "logarithme itératif" de* $\hat f$ *).*

e) $\widetilde{(\hat f_*)} = (\tilde f)_*$ *. Autrement dit, on a le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal H}_\pm \,(\text{ou } \hat{\mathcal G}_\pm) \arrow[r, "\text{logit}"] \arrow[d, "\text{homomorphisme } \sim"'] & \hat{\mathcal E}_{1R}\,(\text{ou } \hat{\mathcal E}_2)\subset\hat{\mathcal E} \arrow[d, "\text{homomorphisme d'algèbre de Lie } \sim"] \\ \tilde{\mathcal H}\,(\text{ou } \tilde{\mathcal G}) \arrow[r, "\text{logit}"] & \tilde{\mathcal E}_1\,(\text{ou } \tilde{\mathcal E}_2)\subset\tilde{\mathcal E} \end{tikzcd}$$

f) *Pour tout* $w\in\mathbb R^+$:

$$\frac{\partial}{\partial w}\hat f^{\circ w} = \hat f_*\circ\hat f^{\circ w} = \hat f_*\,\frac{\partial}{\partial w}\hat f^{\circ w}$$

g) *Que* $\hat f$ *appartienne à* $\hat{\mathcal G}_\pm$ *ou à* $\hat{\mathcal H}_\pm$ *, tout représentant* f_* *de* $\hat f_*$ *est* $\not\equiv 0$ *sur un certain* $]0T]$. $(T>0)$

et la fonction $t\to f^{\circ w}(t)$ *, nulle en* $t=0$ *et définie sans ambiguité sur* $]0T]$ *par la relation :*

$$\int_t^{f^{\circ w}(t)}\frac{d\theta}{f_*(\theta)} = w \qquad (w>0)$$

est un représentant du germe $\hat f^{\circ w}$.

h) Si valit $\hat{f} = 0$ *, il existe dans* $\hat{\mathcal{G}}$ *un germe unique, noté* $\hat{f}^{**}$*, nommé "préitérateur de* $\hat{f}$ *", et tel que :*

$$\left(\hat{f}^{**}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{f}^{**}\right)^{-1} = \rho\,\hat{f}_* \quad ; \quad \rho = \text{résit}\,\hat{f} \quad .$$

De plus, pour tout $w \in \mathbb{R}^+$ *on a :*

$$\hat{f}^{**} \circ \hat{f}^{\circ w} = a^w\,\hat{f}^{**} \quad ; \quad a = \hat{f}'(0) \neq 1 \ .$$

i) Pour tout $\hat{k}$ *de* $\hat{\mathcal{H}}$*, d'inverse* $\hat{h}$ *, on a :*

$$\left(\hat{k}\circ\hat{f}\circ\hat{h}\right)^{\circ w} = \hat{k}\circ\hat{f}^{\circ w}\circ\hat{h} \quad ; \quad \left(\hat{k}\circ\hat{f}\circ\hat{h}\right)_* = \hat{f}_*\circ\hat{h}\,/\,\hat{h}'$$

démonstration : Voir en fin de paragraphe.

Théorème 9 : Soit $\hat{f}$ *un germe appartenant à* $\hat{\mathcal{G}}_-$ *ou à* $\hat{\mathcal{H}}_-$*, et soit* f *un représentant de* $\hat{f}$ *.*

a) Si valit $\hat{f} = 0$ $\left(\textit{i.e. } 0 < \hat{f}'(0) = a < 1\right)$ *et si* f^{**} *est un représentant du préitérateur* $\hat{f}^{**}$ *de* $\hat{f}$ *, on a, pour tout* $t \geqslant 0$ *et assez petit :*

$$f^{**}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(a^{-n} f^{\circ n}\right)$$

b) Si $\hat{f}$ *appartient à* $\hat{\mathcal{G}}_-$ *et est donc de la forme :*

$$\hat{f} = \hat{t} - a(\hat{t})^{p+1} + \hat{o}\left(t^{p+1}\right) \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad 1 \leqslant p = \text{valit}\,\hat{f} < +\infty$$

et si f_* *est un représentant du logarithme itératif* $\hat{f}_*$ *de* $\hat{f}$ *, on a, pour tout* $t > 0$ *et assez petit :*

$$f_*(t) = -\lim_{n\to\infty}\frac{a(npa)^{-\frac{p+1}{p}}}{\frac{d}{dt}\left(f^{\circ n}(t)\right)}$$

Démonstration : Voir en fin de paragraphe.

N. B. Comme tout élément du semi-groupe $\hat{\mathcal{G}}_+$ *(resp* $\hat{\mathcal{H}}_+$*) est l'inverse d'un élément de* $\hat{\mathcal{G}}_-$ $\left(\textit{resp } \hat{\mathcal{H}}_-\right)$ *dans* $\hat{\mathcal{G}}$ $\left(\textit{resp } \hat{\mathcal{H}}\right)$ *le théorème ci-dessus permet de construire effectivement toutes les itérées d'ordre* w *réel* > 0 *des éléments de* $\hat{\mathcal{G}}_\pm$ *ou* $\hat{\mathcal{H}}_\pm$ *par l'intermédiaire de leur logarithme itératif ou préitérateur et en utilisant les relations du théorème 8, g - h).*

On généraliserait aisément à des ordres d'itération w *réels quelconques.*

Le théorème suivant donne une caractérisation directe, pour un w *donné, de* $\hat{f}^{ow}$.

<u>*Théorème 10*</u>. *Soit* $\hat{f}$ *un germe de* $\hat{\mathcal{G}}_-$ *ou* $\hat{\mathcal{H}}_-$, *soit* $w \in \mathbb{R}^+$ *et soient* f, f^{ow} *des représentants de* $\hat{f}$, $\hat{f}^{ow}$. *Alors, pour tout* t *assez petit, le nombre* $\theta = f^{ow}(t)$ *est* <u>*caractérisé*</u> *par les relations suivantes :*

<u>*si valit*</u> $\hat{f} \geqslant 1$: (α)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{on}(t) - f^{on}(\theta)}{f^{on}(t) - f^{o(n+1)}(t)} = w$$

<u>*si valit*</u> $\hat{f} = 0$: (β)
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{on}(t) - f^{on}(\theta)}{f^{on}(t) - f^{o(n+1)}(t)} = w\,\dfrac{1-a^{w}}{1-a} \\ a = f'(0) \end{cases}$$

<u>*N. B.*</u> *On note que les limites des premiers membres de* (α) *et* (β) *existent, et sont continues croissantes en* θ, *pour des* f *plus générales que celles du théorème 10, et qu'on aurait là le moyen, en particulier, de définir les itérées "fractionnaires" de germes* $\hat{f}$ *de valuation itérative infinie, c'est-à-dire n'appartenant pas à* $\hat{\mathcal{H}}_\pm$ *(et par suite, par à* $\hat{\mathcal{G}}_\pm$*). De fait, on pourrait ainsi, en particulier, itérer"fractionnairement" tout germe* $\hat{f}$ *de* $\hat{\mathcal{G}}$ *ou* $\hat{\mathcal{H}}$ *dont un représentant (et par suite : tout autre représentant) est strictement convexe (on concave) sur un certain* $[OT]$ $(T>0)$. *Mais nous n'aurons pas besoin de ces développements.*

<u>*Démonstration du théorème 10*</u> *: Voir ci-après.*

Les théorèmes ci-dessus, 8, 9 et 10, vont résulter d'un théorème auxiliaire, le théorème 11, énoncé ci-dessous. Commençons par donner la

<u>*Définition 4*</u> *:*

a) Pour tout réel $T>0$ *et tout entier* $p \geqslant 0$ *on désigne par* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *le semi-groupe (pour la composition) des endomorphismes* f *de* $[OT]$ *qui sont de la forme :*

$$(\mathcal{A})\begin{cases}(\alpha) & f \in \mathcal{C}^{\infty}[OT] \\ (\beta) & f(t) < t \text{ sur }]OT] \text{ et } f'(t) > 0 \text{ sur }]OT] \\ (\gamma) & \begin{cases} f(t) = t - a t^{p+1} + o(t^{p+1}) \text{ quand } t \searrow 0 \\ \qquad \text{avec } a > 0 \text{ (et en plus, si } p = 0,\ a < 1) \end{cases}\end{cases}$$

b) Etant donné un élément f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$, *s'il existe une fonction* f_* *telle que*

$$(\mathcal{B})\begin{cases}(\alpha') & f_* \in \mathcal{C}^{\infty}[OT] \\ (\beta') & f_*(t) < 0 \text{ sur }]OT] \\ (\gamma') & f_* \circ f(t) = f_*(t)\, f'(t) \quad \text{sur } [OT] \\ (\delta') & \text{quand } t \searrow 0 \quad \begin{cases} f_*(t) \sim f(t) - t & \text{si } p \geq 1 \\ f_*(t) \sim t \log(1-a) = t \log f'(0) & \text{si } p = 0 \end{cases}\end{cases}$$

on dira que f *possède un logarithme itératif* f_*.

Puisque $\mathcal{G}_-(T,p)$ *et* $\mathcal{C}^{\infty}[OT]$ *sont des parties de* $\mathcal{E}$, *on sait définir* $\tilde{f}$ *et* $\widetilde{(f_*)}$ *(Voir ci-avant, au début du § 3).*
$\tilde{f}$ *est un élément de* $\tilde{\mathcal{G}}$, *de valuation itérative égale à* p, *et* $\widetilde{(f_*)}$ *est un élément de* $\tilde{\mathcal{E}}_2 \subset \tilde{\mathcal{E}}$. *On peut alors énoncer le théorème auxiliaire suivant :*

<u>*Théorème 11*</u> : $\forall p \geq 0$ *et* $T > 0$, *toute* f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *possède un logarithme itératif et celui-ci est unique. Il est entièrement caractérisé par* $(\gamma') + (\delta')$ *(Voir déf. 4-b).*
Si on le note f_*, *on a :* $\widetilde{(f_*)} = (\tilde{f})_*$

Commençons par démontrer le théorème 11 dans le cas $p \geq 1$, *au moyen des cinq lemmes suivants :*

<u>*Lemme 1*</u> : $(T > 0\ ;\ p \geq 1)$
a) Si une f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *possède un logarithme itératif* f_* *on a :*
$\widetilde{(f_*)} = (\tilde{f})_*$

b) Toute fonction φ *de* $\mathcal{C}^\infty[OT]$, <0 *sur* $]OT]$ *et de la forme :*

$$(6)\qquad \varphi(t) = -at^{p+1} + o\left(t^{p+1}\right) \qquad (a>0)$$

est le logarithme itératif d'une f *unique de* $\mathcal{G}_-(T,p)$, *et* $f(t)$ *est caractérisé par la relation :*

$$(7)\qquad -\int_{f(t)}^{t} \frac{d\theta}{\varphi(\theta)} = 1$$

c) Pour toute f *de* $\mathcal{G}(T,p)$ *il existe une* g *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$, *possédant un logarithme itératif et telle que* $f(t)-g(t) = o(t^\infty)$

<u>*Démonstration du lemme 1 - a*</u>

Rappelons qu'étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^\infty[OT]$ *on désigne par* $\tilde{\varphi}$ *la série formelle :*
$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n\geq 0} 1/n! \left[\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\right]_{t=0} z^n$$

Si f *est dans* $\mathcal{G}_-(T,p)$, *son développement associé* $\tilde{f}$ *est un élément de* $\tilde{\mathcal{G}}$, *et comme tel il possède un logarithme itératif* $(\tilde{f})_*$, *qui d'après le théorème 1 est caractérisé par :*

$$\begin{cases} (\tilde{f})_* \circ \tilde{f} = (\tilde{f})_* \, (\tilde{f})' \\ (\tilde{f})_*(z) = \tilde{f}(z) - z + \tilde{o}\left(z^{p+1}\right) \quad (\text{car valit } \tilde{f} = p) \end{cases}$$

Mais d'après les relations (γ') *et* (δ') *de* (β) :

$$\begin{cases} \widetilde{(f_* \circ f)} = \widetilde{(f_*)} \circ \tilde{f} = \widetilde{(f_*)}\,\widetilde{(f')} = \widetilde{(f_*)}\,(\tilde{f})' \\ \widetilde{(f_*)}(z) = \tilde{f}(z) - z + \tilde{o}\left(z^{p+1}\right) \end{cases}$$

On voit donc que
$$\widetilde{(f_*)} = (\tilde{f})_*$$

<u>*Démonstration du lemme 1 - b.*</u>

Montrons d'abord que s'il existe $f \in \mathcal{G}_-(T,p)$ *admettant* φ *comme logarithme itératif,* f *est unique et vérifie (7).*

En effet, d'après (γ') : $\quad \varphi \circ f(t) = \varphi(t)\, f'(t)$

Il existe donc K *tel que : (8)*
$$-\int_{f(t)}^{t} \frac{d\theta}{\varphi(\theta)} = K \qquad \forall t \in]OT]$$

et par suite il existe t_1 *, dans* $[g(t), t]$ *et tel que :* (9) $\left(g(t)-t\right)/\varphi(t_1) = K$

Mais puisque $g(t) = t + \underline{O}(t^{p+1})$, $\varphi(t_1) \sim \varphi(t)$ *quand* $t \searrow 0$.

En portant dans (9) et en tenant compte de δ' *(déf. 4) on voit que dans (8) la constante d'intégration* K *doit être choisie égale à 1, ce qui détermine* g *sans ambiguité.*

Inversement, montrons que la fonction g *caractérisée par (8) appartient effectivement à* $\underline{G}(T,p)$.

Désignons par g^* *la primitive de* φ^{-1} *qui n'a pas de "terme constant", c'est-à-dire qui est de la forme :*

$$g^*(t) = \frac{1}{ap}\, t^{-p} + \sum_{-p<k<0} \gamma_k t^k + \gamma_0 \log t + F(t) \text{ avec } \begin{cases} F(0)=0 \\ F \in \mathcal{C}^\infty[0T] \end{cases}$$

Formons l'expression $\theta = t - t^{p+1}(a+s)$ *et considérons la relation :*

(11) $$\Phi(t,s) = g^*(\theta) - g^*(t) - 1$$

qui définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ *de deux variables* t *et* s *, pour* t *et* $s > 0$ *et assez petits. Or les relations :*

$$\begin{cases} \theta^k - t^k = -k t^{p+k}(a+s) + o(t^{p+k}) & \text{si } k \neq 0 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \log\theta - \log t = -t^p(a+s) + o(t^p) \end{cases}$$

montrent que, pour tout n *entier* > 0, Φ *est de la forme*

$$\Phi(t,s) = s a^{-1} + \sum_{0<k\leq n} \delta_k t^k + o(t^n) + s\, O(|t| + |s|)$$

et l'un au moins des δ_k *n'est pas nul, car* $\Phi(t,0)$ *n'est pas un* $o(t^\infty)$.

Par suite Φ *possède les propriétés suivantes :*

(i) $\Phi(t,s)$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur un certain domaine de la forme* $\{0 \leq t \leq t_0\} \times \{0 \leq s \leq s_0\}$ *avec* $t_0 > 0$ *et* $s_0 > 0$.

(ii) $\Phi(0,0) = 0$.

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial s}\Phi(0,0) \neq 0$ *; et il existe un entier* $m_0 \geq 1$ *tel que*

(iiii) $$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(0,0) \begin{cases} = 0 & \text{si } m < m_0 \\ \neq 0 & \text{si } m = m_0 \end{cases}$$

Cela étant, d'après le théorème général sur les fonctions implicites, la relation $\Phi(t,s) \equiv 0$ *définit une fonction* $s = s(t)$ *qui appartient à* $\mathcal{C}^\infty[0,t_1]$ *pour un certain* $t_1 > 0$. *Mais en se reportant à la relation (11) on voit que la fonction* $f(t)$, *définie par* $f(t) = \theta = t - t^{p+1}(a + s(t))$, *appartient à* $\mathcal{G}_-(T',p)$ *pour un certain* T' *de* $]0T]$ *et qu'elle admet* φ *comme logarithme itératif, relativement au semi-groupe* $\mathcal{G}_-(T',p)$

Enfin, on prolonge aisément f *sur le segment* $[0\,T]$ *tout entier, au moyen par exemple de la relation* $-\int_{f(t)}^{t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} = 1$, *qui implique que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0T]$.

Démonstration du lemme 1, c.

Soit en effet une f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$, $\tilde{f}$ *l'élément de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *associé et* $(\tilde{f})_*$ *son logarithme itératif. On peut trouver une* Ψ *de* $\mathcal{C}^\infty[0T]$ *et admettant en* 0 *des dérivées données à l'avance. Par suite on peut trouver une telle* Ψ *vérifiant :*
(11) $\tilde{\Psi} = (\tilde{f})_*$. *Mais* f *est de la forme* $f(t) = t - at^{p+1} + o(t^{p+1})$ *avec* $a > 0$
Par suite $\tilde{f}(z) - z$ *et* $(\tilde{f})_*(z)$ *sont tous deux de la forme* $-az^{p+1} + \tilde{o}(z^{p+1})$ *et on peut donc imposer en plus à* Ψ *d'être* < 0 *sur* $]0T]$.

D'après le point b) Ψ *est le logarithme itératif d'une certaine* g *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *et on a, d'après le point a) :*
(12) $\tilde{\Psi} = (\tilde{g})_*$. *En rapprochant (11) et (12) on voit que* $(\tilde{g})_* = (\tilde{f})_*$, *soit d'après le théorème 1,* $\tilde{g} = \tilde{f}$, *ce qui implique à son tour :*
$g(t) - f(t) = o(t^\infty)$.

Lemme 2 : $(T > 0\,;\, p \geqslant 1)$
a) soit une f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *et soit une* A *de* $\mathcal{C}^\infty[0T]$ *et de la forme* $\mathcal{O}(t^m)$ *avec* $m > p$. *Alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} A \circ f^{\circ n}(t)$ *est uniformément convergente sur* $[0\,T]$ *et sa somme est de la forme* $\mathcal{O}(t^{m-p})$.
b) soit une f *de* $\mathcal{G}_-(T,p)$ *et possédant un logarithme itératif* g_* . *Soit une* A *de* $\mathcal{C}^1[0T]$. *Alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{d}{dt} A \circ g^{\circ n}(t)$ *converge uniformément sur tout* $[T'\,T]$ $(T'>0)$ *et sa somme est de la forme* $\mathcal{O}(t^p)$.
De plus, pour tous $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} \left\{ A \circ g^{\circ n}(t_1) - A \circ g^{\circ n}(t_2) \right\}$ *converge vers une somme* $A(t_1,t_2)$ *qui vérifie : (13)* $|A(t_1,t_2)| < \mathrm{Cste}\, \frac{t_2 - t_1}{t_1^p}$

c) Soient f et g deux éléments de $\mathscr{C}[OT]$ et soient A et B deux éléments de $\mathscr{C}[OT]$ admettant en O des développements limités de tous ordres. Si en outre

$$A(t) - B(t) = o(t^{\infty}) \quad \text{et} \quad f(t) - g(t) = o(t^{\infty})$$

la série $\sum_{n\geq 0} \left(A_\circ f^{\circ n}(t) - B_\circ g^{\circ n}(t) \right)$ converge vers une somme $S(t)$ et $S(t) = o(t^{\infty})$; $S \in \mathscr{C}[OT]$.

<u>Démonstration du lemme 1-a</u>

Pour tout entier $r \geq 1$ et tout $w > 0$ posons :

$$\ell_{r,w}(t) = t\left[1 + w r t^{r}\right]^{-1/r} = \left[t^{-r} + r w\right]^{-\frac{1}{r}}$$

On note que $\quad \ell_{r,u} \circ \ell_{r,v} = \ell_{r,u+v}$

et que $\quad \ell_{r,w}(t) = t - w\, t^{r+1} + o(t^{r+1})$.

Or si $f \in \mathscr{G}_-(T,p)$, f est de la forme $t - a t^{p+1} + o(t^{p+1})$ $(a>0)$ et on peut donc choisir w positif assez petit pour que l'on ait sur $[OT]$:

$$f(t) \leq \ell_{p,w}(t) \leq t$$

et par suite aussi :

$$f^{\circ n}(t) \leq (\ell_{p,w})^{\circ n}(t) = \ell_{p,nw}(t)$$

Si donc $A(t) = O(t^{m})$, la série $\sum_{n\geq 0} \left| A_\circ f^{\circ n}(t) \right|$ sera majorée par la série :

$$\sum_{n\geq 0} K_1 \left[\ell_{p,nw}(t)\right]^{m} = K_1 \sum_{n\geq 0} \left[t^{-p} + n p w\right]^{-\frac{m}{p}}$$

Mais une majoration aisée montre que pour $w > 0$

$$\sum_{n\geq 0} \left[t^{-p} + n p w\right]^{-m/p} \leq K_2(w)\, t^{m-p} \quad , \quad \text{où } K_2(w) \text{ n'est}$$

fonction que de w , et le point a est démontré.

<u>Démonstration du lemme 2-b</u>.

Par définition g et g_* sont liées par la relation (14) $g_* \circ g(t) = g_*(t) \frac{d}{dt} g(t)$

D'où l'on tire, en itérant :

(14 bis) $$g_* \circ g^{\circ n}(t) = g_*(t) \frac{d}{dt} g^{\circ n}(t) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par suite $g_*(t)\,\frac{d}{dt}\left[A\circ g^{\circ n}(t)\right] = \left(g_*\circ g^{\circ n}(t)\right)\times\left(A'\circ g^{\circ n}(t)\right)$ et puisque $(g_* A')(t) = O(t^{p+1})$ l'application du lemme 2, a) montre que la série $\sum_{n\geq 0}(g_* A')\circ g^{\circ n}(t)$ converge uniformément sur $[0T]$ vers une somme qui est un $O(t^{p+1-p} = t)$. Mais puisque $g_*(t)$ est de la forme $\underline{O}(t^{p+1})$ et est $\not\equiv 0$ sur $]0T]$ on a la majoration $|g_*(t)|^{-1} < K t^{-p-1}$ sur $]0T]$ et par suite la série $\sum_{n\geq 0}\frac{d}{dt}\left[A\circ g^{\circ n}(t)\right]$ converge uniformément sur tout $[T'T]$ $(T'>0)$ vers une somme de la forme $O(t^{1-p-1} = t^{-p})$

L'intégration terme à terme entre les bornes $[t_1, t_2]$ est donc légitime et on en tire aussitôt (13).

Démonstration du lemme 2-c.

Comme il existe des fonctions indéfiniment différentiables admettant en un point donné des dérivées successives fixées à l'avance, on peut choisir une fonction C appartenant à $\mathcal{C}^\infty[0T]$ et telle que $A(t)-C(t)=o(t^\infty)=B(t)-C(t)$

Or
$$A\circ f^{\circ n}(t) - B\circ g^{\circ n}(t) = A_n(t) + B_n(t) + C_n(t)$$
à condition de poser :
$$\begin{cases} A_n(t) = (A-C)\circ f^{\circ n}(t) \\ B_n(t) = (C-B)\circ g^{\circ n}(t) \\ C_n(t) = C\circ f^{\circ n}(t) - C\circ g^{\circ n}(t) \end{cases}$$

Mais d'après le point a, les séries $\sum A_n(t)$ et $\sum B_n(t)$ convergent et leurs sommes sont des $O(t^{m-p})$ pour tout m, c'est-à-dire des $o(t^\infty)$. Il suffit donc maintenant de prouver que $\sum C_n(t) = o(t^\infty)$.

Si A, et par suite B et C, sont des $o(t^\infty)$, c'est immédiat d'après le point a.

Sinon, A, et par suite B et C, sont de la forme $\underline{O}(t^m)$ pour un certain entier m, et comme en plus C est indéfiniment dérivable, elle est strictement monotone au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le lemme 1, c) il est possible de trouver une

k de $\mathcal{G}_-(T,p)$; possédant un logarithme itératif et telle que

$$k(t) = f(t) + o(t^\infty) = g(t) + o(t^\infty)$$

Les $\ell_{r,w}$ étant définis comme au point a), posons, pour $t>0$ voisin de 0 :

$$k_{r,w}(t) = \ell_{r,-w} \circ k \circ \ell_{r,w}(t)$$

Un calcul aisé montre que si $k(t) = t - at^{p+1} + o(t^{p+1})$:

$$k(t) - k_{r,w}(t) = (r-p)\, a w\, t^{p+r+1} + o(t^{p+r+1})$$

Par suite, si $r>p$ et compte tenu de la monotonie** de C au voisinage de 0, il existe un $T_0>0$ tel que sur $[0T_0]$ on ait :

$$k_{r,+1}(t) \leqslant \big(k(t) \text{ et } f(t) \text{ et } g(t)\big) \leqslant k_{r,-1}(t)$$

et par suite

$$\begin{cases} k^{on}_{r,+1}(t) \leqslant \big(k^{on}(t) \text{ et } f^{on}(t) \text{ et } g^{on}(t)\big) \leqslant k^{on}_{r,-1}(t) \\ |C_n(t)| \leqslant |C \circ k^{on}_{r,+1}(t) - C \circ k^{on}_{r,-1}(t)| \leqslant C_{n+}(t) + C_{n-}(t) \\ \text{avec } C_{n\pm}(t) = |C \circ k^{on}_{r,\pm 1}(t) - C \circ k^{on}(t)| \end{cases}$$

$$\text{Or:} \quad \begin{cases} C_{n\pm}(t) \leqslant |D_{n\pm} \circ \ell_{r,\pm 1}(t)| + |E_{n\pm}(t)| \\ \text{avec} \begin{cases} D_{n\pm}(t) = C \circ (\ell_{r,\mp 1}) \circ k^{on}(t) - C \circ k^{on}(t) \\ E_{n\pm}(t) = C \circ k^{on}(t) - C \circ k^{on} \circ \ell_{r,\pm}(t) \end{cases} \end{cases}$$

ce qui va permettre de conclure.

En effet $C \circ \ell_{r,\mp 1}(t) - C(t) = \mathcal{O}(t^{r+1})$ et d'après le lemme 2,a) la série $\sum D_{n\pm}(t)$, et donc aussi la série $\sum D_{n\pm} \circ \ell_{r,\pm 1}(t)$, converge vers une somme qui est un $\mathcal{O}(t^{r+1-p})$

D'autre part, puisque $C \in \mathcal{C}^1[0\,T_0]$, on peut appliquer le lemme 2,b) à l'étude de la série $\sum E_{n\pm}(t)$ en prenant :

$$(t_1, t_2) = (\ell_{r,+1}(t), t)$$

$$\Big[\text{resp : } (t_1, t_2) = (t, \ell_{r,-1}(t))\Big]$$

** monotonie que l'on pouvait s'imposer lors du choix de C et qu'on postule ici.

On trouve alors que la série $\sum_{n\geq 0} E_{n\pm}(t)$ converge vers une somme qui est $< \text{Cste}\ \dfrac{t_2-t_1}{t_1^{p+1}}$

Mais $t_2 - t_1 = \underline{O}(t^{r+1})$ et $t_1 \sim t$.

Par suite $\sum_{n\geq 0} E_{n\pm}(t) = \underline{O}(t^{r-p})$.

(C'était pour pouvoir appliquer le lemme 2, b) qu'il était indispensable d'introduire une k possédant un logarithme itératif).

En rassemblant tous les résultats obtenus ci-dessus, on voit que pour tout $t \in [0\ T_0]$ la série $\sum C_n(t)$, et donc aussi la série $\sum (A_0 f^{\circ n}(t) - B_0 g^{\circ n}(t))$, convergent vers des sommes, resp. $R(t)$ et $S(t)$, qui sont des $\mathcal{O}(t^{r-p})$.

Passons maintenant de $[0\ T_0]$ à $[0\ T]$ en remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\begin{cases} f^{\circ n_0}([0\ T]) \subset [0\ T_0] \\ g^{\circ n_0}([0\ T]) \subset [0\ T_0] \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$\sum_{n\geq 0}\left[A_0 f^{\circ n}(t) - B_0 g^{\circ n}(t)\right] = \sum_{0\leq n<n_0}\left[A_0 f^{\circ n}(t) - B_0 g^{\circ n}(t)\right] + \sum_{n\geq 0}\left[A_0 f^{\circ n}(\theta) - B_0 g^{\circ n}(\theta)\right]$$

avec $\theta = f^{\circ n_0}(t)$ et $t \in [0\ T]$

D'après le choix de n_0, θ appartient à $[0\ T_0]$ et d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geq 0}\left[A_0 f^{\circ n}(\theta) - B_0 g^{\circ n}(\theta)\right]$ converge vers une somme $S(\theta)$ qui est un $\mathcal{O}(\theta^{r-p})$, c'est-à-dire aussi un $\mathcal{O}(t^{r-p})$ (car $\theta \sim t$) . Enfin, la somme finie $\sum_{0\leq n<n_0}\left[A_0 f^{\circ n}(t) - B_0 g^{\circ n}(t)\right]$ est manifestement un $\mathcal{O}(t^{\infty})$

Par suite, la série $\sum_{n\geq 0} \left[A \circ f^{\circ n}(t) - B \circ g^{\circ n}(t) \right]$ converge sur $[OT]$ tout entier vers une certaine somme $S(t)$, qui est continue bien entendu, et qui en outre est un $O(t^{r-p})$ pour tout $r \geq p$, et par suite un $o(t^{\infty})$, et ceci achève la démonstration.

Lemme 3 : $(T > 0 \; ; p \geq 1)$

Soit une g appartenant à $\mathcal{G}_{-}(T,p)$ et possédant un logarithme itératif g_*. Alors :

a) pour tout $t \in]OT]$ on a :

(15) $\log\left[-g_*(t)\right] - \log\left[-g_*(T)\right] = -\sum_{n\geq 0}\left\{\log g' \circ g^{\circ n}(t) - \log g' \circ g^{\circ n}(T)\right\}$

b) pour tout q entier ≥ 1 et tout $t \in [OT]$ on a :

(16) $\left[g_*(t)\frac{d}{dt}\right]^q \cdot \log\left[-g_*(t)\right] = -\sum_{n\geq 0}\left\{\left[g_*\frac{d}{dt}\right]^q \cdot \log g'\right\} \circ g^{\circ n}(t)$

Démonstration du lemme 3-a :

Par hypothèse g_* et g sont liés par la relation

(17) $$g_* = g_* \circ g / g'$$

qui entraîne, après itération :

(17 bis) $$g_* = g_* \circ g^{\circ m} / (g^{\circ m})' \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Par suite, pour tout $t \in]OT]$

(17 ter) $$g_*(t) / g_*(T) = \frac{g_* \circ g^{\circ m}(t)}{g_* \circ g^{\circ m}(t)} \cdot \frac{\left[g^{\circ m}(T)\right]'}{\left[g^{\circ m}(t)\right]'}$$

Puisque $g_*(t)<0$ *sur* $]0T]$ *on peut prendre les logarithmes des deux membres de (17 ter) et écrire, en tenant compte de l'identité*

$$(g^{\circ m})' = \prod_{n=0}^{m-1} g' \circ g^{\circ m}$$

$$(18) \quad \log[-g_*(t)] - \log[-g_*(T)] = P_m(t) - Q_m(t)$$

avec

$$\begin{cases} (19) \quad P_m(t) = \log\left[g_* \circ g^{\circ m}(t) / g_* \circ g^{\circ m}(T)\right] \\ (20) \quad Q_m(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \left\{\log g' \circ g^{\circ n}(t) - \log g' \circ g^{\circ n}(T)\right\} \end{cases}$$

D'après le lemme 2, b) la série $\sum_{n\geq 0}\{\log g' \circ g^{\circ n}(t) - \log g' \circ g^{\circ n}(T)\}$ *est convergente, et donc* $Q_m(t)$ *et* $P_m(t)$ *tendent vers des limites quand* $m \to +\infty$.

En remarquant qu'il existe un entier m_0 *tel que* $g^{\circ m_0}(T) \leq g(t)$ *et en passant à la limite (en* m*) dans les inégalités*

$$\frac{g^{\circ(m+m_0)}(T)}{g^{\circ m}(T)} = \frac{g^{\circ m_0}(g^{\circ m}(T))}{g^{\circ m}(T)} \leq \frac{g^{\circ m}(t)}{g^{\circ m}(T)} \leq 1$$

on voit que $\lim_{m\to+\infty}\left(g^{\circ m}(t)/g^{\circ m}(T)\right) = 1$

et par suite que $P(t) \equiv 0$

et ceci établit le point a).

<u>*Démonstration du lemme 3-b*</u>.

De (17 bis) on tire :

$$\left(g_*(t)\frac{d}{dt}\right)\left(H \circ g^{\circ m}(t)\right) = \left(g_* \frac{d}{dt} H\right) \circ g^{\circ m}(t) \qquad \forall H \in \mathcal{C}^1[0\,T]$$

Ceci montre que la relation (16) pour tout $q \geq 2$ *s'obtient formellement à partir de la relation (16) pour* $(q-1)$ *par une dérivation terme à terme, suivie par une multiplication par* $g_*(t)$, *et que la relation (16) pour* $q=1$ *s'obtient de la même manière à partir de la relation (15).*

Mais des relations $g_*(t) = \underline{O}(t^{p+1})$ et $\log g'(t) = \underline{O}(t^p)$

on tire : $\left[g_* \frac{d}{dt}\right]^q \log g'(t) = \underline{O}\left(t^{(q+1)p}\right)$

et en appliquant le lemme 2, a) on voit que pour tout $q \geq 1$ *le second membre de (16) est une série uniformément convergente sur* $[0\,T]$.

Cela montre que la dérivation formelle de (15), puis de (16) pour $q = 1, 2, 3$ *etc ...est légitime, et ceci achève de prouver le lemme 3.*

<u>*Corollaire du lemme 3*</u> *: Si une* g *de* $\mathcal{G}_-(T,\mu)$ *possède un logarithme itératif* g_**, celui-ci est unique.*

En effet, la relation (15) détermine g_* *à un facteur multiplicatif près (à partir de* g *). Mais la condition* $g_*(t) \sim g(t) - t$ *détermine ce facteur sans ambiguité.*

<u>*Lemme 4*</u> *: Toute fonction* f *de* $\mathcal{G}_-(T,\mu)\ (T>0\,;\mu\geq 1)$ *possède un logarithme itératif.*

<u>*Démonstration*</u> *: Soit une* f *quelconque, élément de* $\mathcal{G}_-(T,\mu)$.

D'après le lemme 1-c) il existe une g *de* $\mathcal{G}_-(T,\mu)$*, possédant un logarithme itératif* g_* *et telle que* $f(t) - g(t) = o(t^\infty)$.

D'après le lemme 3-a), pour tout $t \in \,]0\,T]$ *:*

$$(21)\quad \operatorname{Log}[-g_*(t)] - \log[-g_*(T)] = -\sum_{n\geq 0}\left\{\log g'\circ g^{\circ n}(t) - \log g'\circ g^{\circ n}(T)\right\}$$

et d'autre part, d'après le lemme 2,c) $\left[\textit{prendre } (A,B) = (\log f', \log g')\right]$ *la série* $\sum_{n\geq 0}\left\{\log f'\circ f^{\circ n}(\theta) - \log g'\circ g^{\circ n}(\theta)\right\}$ *converge pour tout* θ, $\theta \in \,]0\,T]$ *et sa somme est un* $o(\theta^\infty)$ *. En faisant* $\theta = t$ *, puis* $\theta = T$ *et en tenant compte de (21), on voit que, pour tout* $t \in \,]0\,T]$ *la série :*

$$\sum_{n\geq 0}\left\{\log f'\circ f^{\circ n}(t) - \log f'\circ f^{\circ n}(T)\right\}$$

converge et que si l'on définit, à un facteur multiplicatif positif près, une fonction $\varphi(t)$ *par la relation :*

$$(22)\quad \log[-\varphi(t)] - \log[-\varphi(T)] = -\sum_{n\geq 0}\left\{\log f'\circ f^{\circ n}(t) - \log f'\circ f^{\circ n}(T)\right\}$$

cette fonction φ *est définie,* $\neq 0$ *et continue sur* $]0\,T]$ *et vérifie :*

(23) $$\frac{\varphi(t)}{\varphi(T)} : \frac{g_*(t)}{g_*(T)} = \Phi(T) + o(t^\infty) \quad ; \quad \left(\Phi(T) = \text{Cste en } t\right)$$

et que par suite φ *se prolonge par continuité à* $[0\,T]$ *tout entier, et admet en* 0 *des développements limités de tous ordres.*

Pour déterminer φ *sans ambiguité, imposons la relation :*

(24) $$\varphi(t) \sim f(t) - t$$

Puisque : (24 bis) $$g_*(t) \sim g(t) - t \sim f(t) - t$$

on a $\varphi(t) \sim g_*(t)$ *et par suite, d'après (23) :*

(25) $$\varphi(t) - g_*(t) = o(t^\infty)$$

Substituant ensuite $f(t)$ à t *dans (22) on établit facilement que :*

(26) : $$\varphi \circ f(t) = f'(t)\,\varphi(t)$$ *,et, en itérant :*

(26 bis) $$\varphi \circ f^{\circ n}(t) = \left(f^{\circ n}\right)'\varphi(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons maintenant (par recurrence sur l'entier q *) que la fonction* φ *qu'on vient de définir possède, pour tout* $q \geqslant 0$ *, les trois propriétés* $\mathcal{P}_i(q)$ *suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mathcal{P}_1(q) : & \varphi \in \mathcal{C}^q[0\,T] \\
\mathcal{P}_2(q) : & \underline{\text{si } q = 0 :} \\
& \mathcal{R}(0) : \log[-\varphi(t)] - \log[-\varphi(T)] = -\sum_{n\geqslant 0}\left\{\log f'\circ f^{\circ n}(t) - \log f'\circ f^{\circ n}(T)\right\} \\
& \underline{\text{si } q > 0 :} \\
& \mathcal{R}(q) : \left[\varphi(t)\frac{d}{dt}\right]^q \log[-\varphi(t)] = -\sum_{n\geqslant 0}\left\{\left[\varphi\frac{d}{dt}\right]^q \log f'\right\}\circ f^{\circ n}(t) \\
\mathcal{P}_3(q) : & \varphi^{(q)}(t) - (g_*)^{(q)}(t) = o(t^\infty)
\end{array}\right.$$

Les propriétés $\mathcal{P}_1(0)$, $\mathcal{P}_2(0)$ *et* $\mathcal{P}_3(0)$ *viennent d'être démontrées (Voir (22) et (25)). Supposons maintenant les* $\mathcal{P}_i(q)$ *vraies pour* $q \leqslant q_0$ *(*q_0 *fixé* $\geqslant 0$*) et montrons que les* $\mathcal{P}_i(q_0+1)$ *sont vraies.*

Commençons par noter qu'en vertu de (26 bis) on a, pour tout $n \geqslant 0$ *et tout* $H \in \mathcal{C}^1[0T]$:

(27) $$\left(\varphi(t)\frac{d}{dt}\right) H \circ f^{\circ n}(t) = \left(\varphi \frac{d}{dt} H\right) \circ f^{\circ n}(t)$$

Or la fonction $H_{q_0}(t) \equiv \left(\varphi(t)\frac{d}{dt}\right)^{q_0} \cdot \log f'(t)$ *ne contient que les dérivées de* φ *d'ordre* $\leqslant q_0 - 1$. *Donc, en verte de l'hypothèse de récurrence :*

$$H_{q_0} \in \mathcal{C}^1[0\,T]$$

et on peut appliquer (27) avec $H = H_{q_0}$. *Ceci montre que la relation* $\mathcal{R}(q_0+1)$ *se déduit formellement de la relation* $\mathcal{R}(q_0)$ *par application terme à terme de l'opérateur différentiel* $\varphi(t)\frac{d}{dt}$.

D'autre part, d'après le lemme 3-b), pour tout $q \geqslant 1$, g *et* g_* *sont liées par la relation :*

$$\mathcal{S}_{(q)} \quad : \quad \left[g_*(t)\frac{d}{dt}\right]^q \cdot \log\left[-g_*(t)\right] = -\sum_{n\geqslant 0}\left\{\left(g_*\frac{d}{dt}\right)^q \log g\right\} \circ g^{\circ n}(t)$$

Mais puisque par construction de g : $f(t) - g(t) = \sigma(t^\infty)$ *et puisque, par hypothèse,* $\mathcal{P}_3(q)$ *est vraie pour tout* $q \leqslant q_0$, *on voit que si l'on pose :*

$$\begin{cases} A(t) = A_{q_0+1}(t) = \left(\varphi\frac{d}{dt}\right)^{q_0+1} \cdot \log f'(t) \\ B(t) = B_{q_0+1}(t) = \left(g_*\frac{d}{dt}\right)^{q_0+1} \cdot \log g'(t) \end{cases}$$

on aura : $$A(t) - B(t) = \sigma(t^\infty).$$

On est donc dans les conditions d'application du lemme 2-c) et on peut affirmer que pour tout $t \in [0T]$ *la série :*

(28) $$\sum_{n\geqslant 0}\left\{A \circ f^{\circ n}(t) - B \circ g^{\circ n}(t)\right\}$$

converge et que sa somme est un $\sigma(t^\infty)$

Mais comme cette série n'est autre que la différence terme à terme des seconds membres de $\mathcal{R}(q_0+1)$ et $\mathcal{S}(q_0+1)$ et comme le second membre de $\mathcal{S}(q_0+1)$ converge, on en déduit que le second membre de $\mathcal{R}(q_0+1)$ converge lui aussi. Cela prouve que la différentiation terme à terme de $\mathcal{R}(q_0)$ est légitime. Or le premier membre de $\mathcal{R}(q_0)$ est de la forme :

$$\begin{cases} \varphi^{q_0-1}\varphi^{(q_0)} + Q_{q_0}(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(q_0-1)}) \\ \text{où } Q_q \text{ est un polynôme, à coefficients constants, de } q \text{ variables.} \end{cases}$$

Puisque $\varphi \neq 0$ sur $]0T]$, la dérivabilité de ce premier membre implique donc celle de $\varphi^{(q_0)}$ sur $]0T]$.

Mais la somme de la série (28) est un $o(t^\infty)$. Par suite :

$$\varphi^{q_0}_{(t)}\varphi^{(q_0+1)}_{(t)} + Q_{q_0+1}\left(\varphi_{(t)}, \dots, \varphi^{(q_0)}_{(t)}\right) - g_*^{q_0}{}_{(t)}\, g_*^{(q_0+1)}{}_{(t)} - Q_{q_0+1}\left(g_*(t), \dots, g_*^{(q_0)}(t)\right) = o(t^\infty) \qquad (29)$$

Moyennant $\mathcal{P}_3(0), \mathcal{P}_3(1), \dots, \mathcal{P}_3(q_0)$ on tire aisément de (29) :

$$\varphi^{(q_0+1)}_{(t)} - g_*^{(q_0+1)}(t) = o(t^\infty),$$

c'est-à-dire : $\mathcal{P}_3(q_0+1)$, et ceci achève la démonstration de l'hypothèse de récurrence.

Récapitulons les propriétés de la fonction φ :

$$\begin{cases} \text{(i) } \varphi \in \mathcal{C}^\infty[0T] \qquad \text{(ii) } \varphi\circ f = f'\varphi \\ \text{(iii) } \varphi(t) \sim f(t) - t \quad \text{quand } t \searrow 0 \\ \text{(iiii) } \varphi \text{ est } \neq 0 \text{ sur }]0T] \text{, et par suite de (iii) } \varphi < 0 \text{ sur }]0T] \end{cases}$$

Il en résulte que la fonction f admet φ comme logarithme itératif, et ceci achève la démonstration du lemme 4.

<u>Lemme 5</u> : Soit f une fonction de $\mathcal{G}_-(T, p)$ $(T>0\,;\, p\geqslant 1)$

D'après le lemme 4, f possède un logarithme itératif f_*, et d'après le corollaire du lemme 3, ce logarithme itératif est unique. En fait, toute fonction φ vérifiant :

(30) $\varphi \circ f = \varphi\, f'$ et (31) $\varphi(t) \sim f(t) - t$

est égale à f_*.

Démonstration :

De (30) on tire en effet : $\varphi \circ f^{\circ n} = \varphi\,(f^{\circ n})' \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite la relation

$$\mathcal{C}(\psi) : \quad \frac{\psi \circ f^{\circ n}(t)}{\frac{d}{dt} f^{\circ n}(t)} = \psi(t)$$

est vérifiée pour $\psi = \varphi$ et pour $\psi = f_*$, et en divisant $\mathcal{C}(\varphi)$ par $\mathcal{C}(f_*)$ $(f_* \neq 0 \text{ sur }]0T])$ on trouve :

(32) $\varphi(t) / f_*(t) = \varphi \circ f^{\circ n}(t) \;/\; f_* \circ f^{\circ n}(t)$.

Mais $\varphi(t) \sim f(t) - t \sim f_*(t)$ quand $t \searrow 0$.

Donc, à t fixe, et quand $n \to +\infty$, le second membre de (32) tend vers 1, ce qui prouve le lemme 5 et achève du même coup la démonstration du théorème 11 dans le cas où $\mu \geqslant 1$. Quant à la démonstration du théorème 11 dans le cas $\mu \geqslant 1$, elle est exactement analogue : il suffit de remplacer la condition $f_*(t) \sim f(t) - t$ par la condition $f_*(t) \sim t \log f'(0)$ et, dans la démonstration du lemme 2, a), de substituer à la majoration de $f(t)$ par $\ell_{n,w}(t)$ une majoration par $\lambda_w(t) = wt$.

A partir de là on démontre les théorèmes 8, 9 et 10 du présent paragraphe de la manière suivante :

Tout $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{H}}_+$ ou $\hat{\mathcal{G}}_+$ est remplacé par son inverse, qui est un élément de $\hat{\mathcal{H}}_-$ ou $\hat{\mathcal{G}}_-$. Ensuite, à tout germe $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{H}}_-$ ou $\hat{\mathcal{G}}_-$ on associe l'un quelconque de ses représentants, soit f. Si valit $\hat{f} = \mu$, il existe nécessairement des T assez petits pour que f appartienne à $\mathcal{G}_-(T,\mu)$. On construit alors le logarithme itératif $f_* = f_{*T}$ de f, considéré comme élément de $\mathcal{G}_{-}(T,\mathbb{k})$, et pour tout $w>0$ on définit un élément f_T^{ow} de $\mathcal{G}_{-}(T,\mathbb{k})$ par la relation

$$-\int_{f_T^{ow}(t)}^{t} \frac{d\theta}{\widehat{f_*}(\theta)} = w$$

On note ensuite que le germe $(f_T^{ow})^{\wedge}$ ne dépend ni du choix de T ni du choix du représentant f de $\hat{f}$, ce qui autorise à poser : $\hat{f}^{ow} = \widehat{(f_T^{ow})}$.

A partir de là, et du théorème 11, l'obtention des énoncés des théorèmes 8, 9 et 10 n'est qu'une affaire de vérifications aisées, sur lesquelles nous n'insisterons pas.

CHAPITRE II

LA THEORIE ITERATIVE DANS LES GROUPES $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ ET $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$.

§ I : DEFINITION DES CLASSES $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$. THEOREMES DE STABILITE.

Le présent chapitre étudie la régularité ou non-régularité, en un sens qu'on précise, des opérateurs logit et expit Son intérêt autonome est limité, mais il est indispensable pour la suite, et notamment les chapitres III et IV de la partie A.

Définition 1 :

a) Suites de type $\mathcal{R}$. *On appelle suite de type* $\mathcal{R}$, *ou de type régulier, toute suite* $\{\Gamma_n\}$ $(n\geq 1)$, *positive, non décroissante et telle que*

$$\limsup \left(\Gamma_{n+1}/\Gamma_n\right) < \infty .$$

b) Classes $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$. *On dit qu'une série formelle de* $\tilde{\mathcal{E}}$, *c'est-à-dire du type:(1)* $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n\geq p} a_n z^{n+1}$ $(p\in\mathbb{Z})$ *appartient à la classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *si*

(2) $\limsup \dfrac{1}{\Gamma_n} |a_n|^{1/n} < \infty .$

c) Opérateur Γ. *Pour toute suite* $\Gamma = \{\Gamma_n\}$ *et toute* $\tilde{\varphi}$ *du type (1) on désigne par* ${}^{\Gamma}\tilde{\varphi}$ *l'élément de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *défini par :*

(1 bis) $${}^{\Gamma}\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n\leq 0} a_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 1} a_n \Gamma_n^{\,n} z^{n+1}$$

d) Enfin, pour deux éléments $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ on écrit $\tilde{\varphi} \ll \tilde{\psi}$ si les coefficients de $\tilde{\psi}$ majorent en valeur absolue ceux de $\tilde{\varphi}$, i. e. si

$$|\tilde{\varphi}^{(n)}(0)| \leqslant \tilde{\psi}^{(n)}(0) \qquad \forall n$$

Remarque : Voici trois exemples, importants pour les applications, de suites $\{\Gamma_n\}$ de type $\mathcal{R}$:

(i) $\Gamma_n \equiv 1$ (ii) $\Gamma_n = \log n$ ou $\Gamma_n = \prod_{n=1}^{N} \log_{(n)} n$

où $\log_{(n)}(n)$ désigne $(\log\ (\log\ \ldots\ (\log n))\ldots)$ n fois et où N est fixe.

(iii) $\Gamma_n = n^\theta$ $(\theta > 0)$. Les classes $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ correspondantes sont respectivement :
(i) la calsse "analytique" (ii) les classes quasi-analytiques "originelles" de Denjoy (iii) les classes de Gevray d'indice θ.

Théorème 1 : $\Gamma = \{\Gamma_n\}$ désigne ici une suite de type $\mathcal{R}$.

a) étant donné deux éléments $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$, à coefficients positifs et de la forme $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{O}(1)$ et $\tilde{\psi}(z) = \underline{\tilde{O}}(z)$, on a :

$$({}^{\Gamma}\tilde{\varphi}) \circ ({}^{\Gamma}\tilde{\psi}) \ll {}^{\Gamma}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})$$

b) $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ est stable

(i) par intégration et dérivation formelle.

(ii) par la multiplication ordinaire

(iii) par composition : $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \longrightarrow \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$ où $\tilde{\psi}(z) = \underline{\tilde{O}}(z)$

(iiii) par prise de l'inverse (de composition) d'un $\tilde{f}$ de la forme $\underline{\tilde{O}}(z)$ (i.e. $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{K}}$).

Démonstration du théorème 1, a).

On peut bien sûr se ramener au cas où $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{K}}$. Si alors on pose :

$$*) \quad \tilde{\varphi}(z) = az + \sum_{n \geqslant 1} a_n z^{n+1} \ ; \ \tilde{\psi}(z) = bz + \sum_{n \geqslant 1} b_n z^{n+1} \quad (a, b > 0 ; a_n, b_n \geqslant 0)$$

$$*) \quad (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(z) = cz + \sum_{n \geqslant 1} c_n z^{n+1}$$

$$*)\quad {}^{\Gamma}(\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi})(z) = c'z + \sum_{n\geq 1} c'_n z^{n+1}$$

$$*)\quad ({}^{\Gamma}\tilde{\varphi})\circ({}^{\Gamma}\tilde{\psi})(z) = c''z + \sum_{n\geq 1} c''_n z^{n+1}$$

on aura : (3) $c' = c = c''$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$c_n = a b_n + \sum K_{\{i,j,n_1,n_2\dots\}}\ (a_i b^j b_1^{n_1} b_2^{n_2}\dots)$$

où les $K_{\{i,j,n_1,n_2\dots\}}$ *sont des constantes* ≥ 0 *et où le* $\sum$ *est pris par rapport aux* $\{n_q\}$ *tels que :*

(4) $\quad i + n_1 + 2n_2 + \dots = n \quad ; \ 1 \leq i \leq n \ ; \ 0 \leq j \leq 1+i$

Par suite : $c''_n = a\,\Gamma_n b_n + \sum K_{\{i,j,n_1,n_2,\dots\}}(a_i \Gamma_i^i b^j b_1^{n_1}\Gamma_1^{n_1} b_2^{n_2}\Gamma_2^{2n_2}\dots)$

D'où, en majorant chaque Γ_r *par* Γ_n *(pour* $r \leq n$ *) :*

(5) $\quad c''_n \leq a b_n \Gamma_n + \sum K_{\{\dots\}}\,(a_i b^j b_1^{n_1} b_2^{n_2}\dots)\ \Gamma_n^{(i+n_1+2n_2+\dots)}$

soit, d'après (4) : (5 bis) : $c''_n \leq c_n \Gamma_n^n \ (n \geq 1)$

Or par définition même de ${}^{\Gamma}(\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi})$ *on a : (5 ter) :* $c'_n = c_n \Gamma_n^n \ (\forall n \geq 1)$

(3), (5 bis) et (5 ter) montrent bien que $({}^{\Gamma}\tilde{\varphi})\circ({}^{\Gamma}\tilde{\psi}) \ll {}^{\Gamma}(\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi})$

<u>Démonstration du théorème 1, b)</u>.

Le point (i) résulte aussitôt des propriétés des suites $\mathcal{R}$*, qui assurent que le rapport* Γ_{n+1} / Γ_n *oscille entre 1 et une constante* $k < \infty$.

Le point (ii) est très simple.

Le point (iii) résulte de la partie a) du présent théorème. En effet supposons d'abord que $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{0}(z)$ *et posons pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *:*

$$\tilde{g}_\lambda(z) = \lambda z + \lambda^2 z^2 + \dots = \lambda z (1-\lambda z)^{-1}$$

L'appartenance de $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ s'exprime par l'existence de réels positifs h_1 et h_2 tels que $\tilde{\varphi} \ll {}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_1}$ et $\tilde{\psi} \ll {}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_2}$.

Mais alors $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} \ll ({}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_1}) \circ ({}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_2})$ et d'après le point a :

$$({}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_1}) \circ ({}^{\Gamma}\tilde{g}_{h_2}) \ll {}^{\Gamma}(\tilde{g}_{h_1} \circ \tilde{g}_{h_2})$$

et puisqu'on vérifie que $\tilde{g}_{h_1} \circ \tilde{g}_{h_2} = (1+k')^{-1} \tilde{g}_{h_2+h_1h_2}$, il s'ensuit que ${}^{\Gamma}(\tilde{g}_{h_1} \circ \tilde{g}_{h_2})$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, et majore en valeur absolue $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$, ce qui démontre le point (iii) lorsque $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{O}(z)$.

On passe ensuite au cas d'un $\tilde{\varphi}$ général en montrant séparément l'appartenance à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ d'un nombre fini de termes de la forme $\tilde{\psi}^{-k}(z)$ ce qui se fait aisément, par exemple, en mettant $\tilde{\psi}(z)$ sous la forme $bz(1+z^2\tilde{h}(z))$ avec $\tilde{h}(z) = \underline{\tilde{O}}(z)$ et en substituant $\tilde{h}(z)$ à Z dans la série $(bz)^{-k}(1+z^2Z)^{-k}$, qui est manifestement de classe "holomorphe" en (z, Z).

Il ne reste plus qu'à examiner le point (iiii). Désignons par $\tilde{g}$ l'inverse de $\tilde{f}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ et posons :

(6) $\tilde{f}(z) = az - \sum_{n \geq 1} a_n z^{n+1}$ et (7) $\tilde{g}(z) = bz + \sum_{n \geq 1} b_n z^{n+1}$

Bien sûr $b = a^{-1}$ et d'autre part en substituant $\tilde{g}(z)$ à z dans (6) et en identifiant à 0 le coefficient de z^{n+1}, on trouve pour chaque $n \geq 1$ une relation R_n du type :

(8) $a b_n = P_n(a_i, b_j)$ où P_n est un polynôme en $a, a_1, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, à coefficients ≥ 0 et indépendants de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. On déduit de là que :

(8 bis) $b_n = Q_n(a_i)$ où Q_n est un polynôme en $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ de la forme (8 ter) : $Q_n = \sum Q_{\{n_i\}} a^{-n_0} \prod_{i=1}^{n} a_i^{n_i}$, où les $Q_{\{n_i\}}$ sont des constantes ≥ 0 et où la $\sum$ s'étend à toutes les familles $\{n_i\}$ telles que

$$(9)\quad \begin{cases} 0 \leqslant n_i \leqslant n \quad (\text{si } i>0) \\ 0 \leqslant n_0 \leqslant 2n+1 \quad \text{et} \quad \sum i n_i = n \end{cases}$$

Mais puisque $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, *il existe* $k>0$ *tel que*

$$(10)\qquad |a_n| < k^n \Gamma_n^n \quad ; \forall n \geqslant 1$$

Chaque monôme $a^{-n_0}\prod a_i^{n_i}$ *du second membre de (8 ter) est donc majoré en valeur absolue par* $|a|^{-n_0} k^{\sum i n_i} \prod_i \Gamma_i^{\,i n_i}$, *et donc aussi par* $|a|^{-n_0}(k\Gamma_n)^{\sum i n_i} = |a|^{-n_0}(k\Gamma_n)^n$, *soit enfin* (*puisque* $n_0 \leqslant 2n+1$) *par :* $(k_1\Gamma_n)^n$ *par exemple, avec* $k_1 = k \sup(1, |a|^{-3})$

Compte tenu de la positivité des $Q\{n_i\}$ *on trouve donc*

$$|b_n| \leqslant Q_n(|a_i|) \leqslant \Gamma_n^n Q_n(c_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_0 = a \\ c_i = (k_1)^i \quad , \forall i \geqslant 1. \end{cases}$$

Mais puisque la série $\tilde{h}(z) = az - \sum c_i z^{i+1}$, *qui est le développement à l'origine d'une fonction holomorphe en* 0, *admet pour inverse de composition la série* $\tilde{h}^{\circ(-1)}(z) = a^{-1} + \sum Q_n(c_i) z^{n+1}$, *qui est aussi le développement à l'origine d'une fonction holomorphe, il existe une constante* k_2 *telle que* $Q_n(c_i) \leqslant k_2^n$ *et par suite, telle que* $|b_n| \leqslant \Gamma_n^n k_2^n ; \forall n \geqslant 1$ *ce qui prouve que* $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *et achève la démonstration du théorème 1.*

<u>Définition 2</u> :

On désigne par $\tilde{\mathcal{K}}\{\Gamma_n\}$, $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ *et* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *les sous-ensembles de* $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ *et* $\tilde{\mathcal{G}}$ *formés des éléments qui sont de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$. *Si la suite* $\{\Gamma_n\}$ *est de type* $\mathcal{R}$, *ce sont des sous-groupes de* $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ *et* $\tilde{\mathcal{G}}$ (*cela résulte du théorème 1, b (iii) et (iiii)*).

Nous allons maintenant étudier la stabilité éventuelle des classes $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *par rapport aux opérateurs : expit, logit etc ... introduits plus haut. Le principal champ d'application sera fourni par les fonctions holomorphes, quasi-analytiques, et de Gevray.*

§ 2 - REGULARITE DE L'EXPONENTIATION ITERATIVE.

Théorème 2 (Régularité de l'opérateur expit)

Si $\{\Gamma_n\}$ *est une suite de type* $\mathcal{R}$ *et si* $\tilde{f}$ *est un élément de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *(resp* $\tilde{\mathcal{H}}$ *) possédant un logarithme itératif* $\tilde{f}_*$ *de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, *alors* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{f}^{ow}$ $(\forall w \in \mathbb{C})$ *appartiennent à* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *(resp. à* $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$*)*

Démonstration :

Premier cas : valit $\tilde{f} \geq 1$ *(i.e.* $\tilde{f}\ \tilde{\mathcal{G}}$ *).*

On a alors $\tilde{f}_*(z) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n z^{n+1}$ *(Ici, bien sûr, on n'impose pas* $\alpha_1 \neq 0$

Or d'après le théorème 2 (A, I, § 1), l'exponentielle itérative d'ordre w *de* $\tilde{f}_*$, *qu'on note* $\tilde{f}^{ow}$ *ou* $\operatorname{expit}(w\tilde{f}_*)$, *s'exprime en fonction de* $\tilde{f}_*$ *par la formule :*

$$\tilde{f}^{ow}(z) = z + \sum_{q\geq 1} \frac{w^q}{q!} \left(\tilde{f}_*(z)\frac{d}{dz}\right)^q \cdot (z) = z + \sum_{n\geq 1} a_n(w) z^{n+1}$$

D'où il résulte que $a_n(w) = a_n(w;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *où* a_n *est un polynôme par rapport à ses* $(n+1)$ *variables. Puisque* $\tilde{f}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *par hypothèse, il existe une constante* $k>0$ *telle que* $|\alpha_n| < k^n\Gamma_n^n$. *Or pour des raisons d'homogénéité,* $a_n(w;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *ne contient que des monômes du type :*

$$w^{n_0}\prod_i \alpha_i^{n_i} \quad \text{avec} \quad \sum i n_i = n$$

et les coefficients précédant ces monômes sont manifestement positifs ou nuls. A partir de là, et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, a ci-dessus, on montre facilement que

$$|a_n(w;\alpha_1,\dots,\alpha_n)| \leqslant a_n(|w|; k\Gamma_1, k^2\Gamma_2^2,\dots, k^n\Gamma_n^n)$$
$$\dots \leqslant \Gamma_n^n\, a_n(|w|, k, k^2,\dots k^n).$$

L'appartenance de $\tilde{f}^{ow}$ *à* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *sera démontrée , si nous prouvons que pour tout* $v>0$, *le développement (en* z *)* $\tilde{g}^{ov}$ *défini par :*

$$\tilde{g}^{ov}(z) = expit\left(v\,\tilde{g}_*\right) = z + \sum_{n\geq 1} a_n\left(v, k, \ldots, k^n\right) z^{n+1}$$

appartient à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Delta_n \equiv 1\}$, *c'est-à-dire à la classe des développements "holomorphes". Mais les relations ci-dessus postulent que*

$$\tilde{g}_*(z) = \sum_{q\geq 1} k^q z^{q+1} = k z^2 (1-kz)^{-1}\ .\ \text{Or}\ \tilde{g}_*^{-1}$$

admet pour primitive le développement "généralisé" : $\tilde{G}(z) = -k^{-1}z^{-1} - k^{-1}\log z$.

D'après la théorie générale (cf. A, I) $\tilde{g}^{ov}$ *est de la forme :*

$$\tilde{g}^{ov}(z) = z\left(1+\tilde{\Psi}(z)\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\Psi}(z) = \underline{\tilde{O}}(z) \\ \tilde{G}\{z(1+\tilde{\Psi}(z))\} = v + \tilde{G}(z) \\ \iff k^{-1}z^{-1}(1+\tilde{\Psi}(z))^{-1} + k^{-1}\log(1+\tilde{\Psi}(z)) - k^{-1}z^{-1} + v = 0 \end{cases}$$

et en appliquant à ce système le théorème sur les fonctions implicites holomorphes, on démontre que $\tilde{\Psi}$, *et donc aussi* $\tilde{g}^{ov}$, *sont des développements "holomorphes", i. e. de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{1\}$, *et ceci achève la démonstration.*

<u>Deuxième cas : valit $\tilde{f} = 0$</u> (i.e. $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}} \dot{-} \tilde{\mathcal{G}}$)

Ce cas est immédiat. En effet, si $\tilde{f}_*$ *est de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, *en appliquant les théorèmes de stabilité du § 1, on montre successivement l'appartenance à* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$:

1) *de* $\tilde{f}_*^{-1}$
2) *de la primitive* $\tilde{f}^*$ *de* $\tilde{f}_*^{-1}$ *(au terme ($\rho\log z$) près)*
3) *du préitérateur* $\tilde{f}^{**}(z) = exp\,(\alpha\,\tilde{f}^*(z))$ $\left(\text{où } \alpha = \log \tilde{f}'(0)\right)$
4) *de l'inverse de composition* ${}^{**}\tilde{f}$ *de* $\tilde{f}^{**}$

et enfin

5) *de l'itérée générale* $\tilde{f}^{ow} = {}^{**}\tilde{f}\left(e^{\alpha w}\,\tilde{f}^{**}(z)\right)$.

§ 3 : NON-REGULARITE DE LA PRISE DU LOGARITHME ITERATIF.

Ici comme ci-avant, $\Gamma = \{\Gamma_n\}$ *désigne toujours une suite de type* $\mathcal{R}$.

Théorème 3 : (Non-régularité de l'opérateur logit).

a) soit $\tilde{f}$ *un élément de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et* $\tilde{f}_*$ *son logarithme itératif.*
Si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, *alors* $\tilde{f}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{n\Gamma_n\}$ *mais en général* $\tilde{f}_* \notin \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$

a bis) En particulier si $\lim (n^{-1}\Gamma_n) = 0$, *il est certain qu'il existe des* $\tilde{f}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *telles que* $\tilde{f}_* \notin \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$.
[*En fait, cette propriété est probablement vraie dans tous les groupes* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$].

b) Au contraire, tout élément $\tilde{f}$ *de* $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ *de valuation itérative nulle, possède (comme élément de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *) un logarithme itératif* $\tilde{f}_*$ *qui est de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$.

Démonstration du théorème 3, a) :

Posons :

$$\tilde{f}(z) = z + \sum_{n\geq 1} a_n z^{n+1} \; ; \; \tilde{f}^{\circ w}(z) = z + \sum_{n\geq 1} a_n(w) z^{n+1} \; ; \; \tilde{f}_*(z) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n z^{n+1}$$

D'après le théorème 2, b de (A, I, §1), $\tilde{f}_*$ *s'exprime à partir de* $\tilde{f}$ *par la relation :*

$$(11) \quad \tilde{f}_*(z) = \sum_{n\geq 1} n^{-1}(-1)^{n+1}\tilde{A}_n(z) \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k \, \tilde{f}^{\circ(n-k)}(z).$$

De là on tire : $\tilde{A}_{n+1} = (\tilde{A}_n) \circ \tilde{f} - \tilde{A}_n$ *et puisque* $\tilde{A}_1(z) = \tilde{f}(z) - z = \tilde{O}(z^2)$ *on voit facilement par récurrence que* $\tilde{A}_n(z) = \tilde{O}(z^{n+1})$. *Par suite le coefficient* α_n *de* z^{n+1} *dans* $\tilde{f}_*(z)$ *est égal au coefficient de* z^{n+1} *dans la série :*

$$\tilde{\varphi}_n(z) = z + \sum_{m=1}^{n} m^{-1}(-1)^{m+1}\tilde{A}_m(z).$$

Avec la notation symbolique $X^k = \tilde{f}^{\circ k} \; (\forall k \in \mathbb{N})$ *on peut écrire :*

$$\tilde{\varphi}_n = \sum_{m=1}^{n} m^{-1}(-1)^{m+1}(X-1)^m$$

soit, après quelques regroupements formels licites :

$$\tilde{\varphi}_n = -(1+2^{-1}+\dots n^{-1}) + \sum_{m=1}^{n} C_n^m (-1)^{m+1} m^{-1} X^m$$

c'est-à-dire

(12) $$\tilde{\varphi}_n(z) = -(1+2^{-1}+\dots n^{-1}) + \sum_{m=1}^{n} C_n^m (-1)^{m+1} m^{-1} \tilde{f}^{\circ m}(z)$$

De la relation (12) et de la remarque faite plus haut et selon laquelle $\tilde{f}_*(z) = \tilde{\varphi}_n(z) + \tilde{O}(z^{n+2})$, *on déduit :*

(13) $$\alpha_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^{m+1} m^{-1} C_n^m \; a_n(m) \quad ; \forall n \geqslant 1$$

D'où: (14) $$|\alpha_n| \leqslant 2^n \sup_{1 \leq m \leq n} |a_n(m)|$$

Posons maintenant :

$$\begin{cases} (15) & \tilde{g}_k(z) = z + \sum_{n \geqslant 1} b_n z^{n+1} = z(1-kz)^{-1} \\ (15\text{bis}) & \tilde{g}_k^{\circ w}(z) = z + \sum_{n \geqslant 1} b_n(w) z^{n+1} = z(1-wkz)^{-1} \end{cases}$$

En utilisant les notations du § 1, l'appartenance de $\tilde{f}$ *à la classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *équivaut à l'existence d'un* $k>0$ *tel que :*

(16) $$\tilde{f} \ll {}^{\Gamma}\!(\tilde{g}_k) \qquad \text{et par suite :}$$

(17) $$(\tilde{f})^{\circ m} \ll \left({}^{\Gamma}(\tilde{g}_k)\right)^{\circ m} \qquad (\forall m \text{ entier et } \geqslant 1)$$

D'où, par application répétée du théorème 1, a) :

(18) $$\left({}^{\Gamma}(\tilde{g}_k)\right)^{\circ m} \ll {}^{\Gamma}\!\left(\tilde{g}_k^{\circ m}\right) \qquad \text{, et finalement}$$

$$(\tilde{f})^{\circ m} \ll {}^{\Gamma}\!\left(\tilde{g}^{\circ m}\right)$$ *, ce qui se traduit par les inégalités :*

$$|a_n(m)| \leqslant \Gamma_n^n b_n(m) = \Gamma_n^n (mk)^n$$

D'où, compte tenu de (14) :

(20) $$|\alpha_n| \leqslant (n\Gamma_n)^n (2k)^n$$ *, c'est-à-dire :* $\tilde{f}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{n\Gamma_n\}$.

Démonstration du théorème 3, a bis).

Ce point résultera du corollaire du théorème 2 (A, IV § 2), qui sera établi indépendamment au chapitre IV.

Démonstration du théorème 3, b).

Nous devons examiner des $\tilde{f}$ de la forme

$\tilde{f}(z) = az + \tilde{\sigma}(z)$ avec $a \neq 1$ et > 0. On peut supposer $0<a<1$ (si $a>1$, on se ramène au cas précédent en envisageant $\tilde{f}^{\circ(-1)}$).

Pour tout k, introduisons l'élément $\tilde{g} = \tilde{g}_{a,k}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ par la relation :

$$\tilde{g}(z) = a(z + kz^2 + k^2z^3 + \dots) = az(1-kz)^{-1}.$$

On calcule à partir de là :

$$(21) \qquad \tilde{g}^{\circ m}(z) = a^m z\left\{1 - k(1-a^m)(1-a)^{-1}z\right\}^{-1}.$$

Puisque $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, il existe $k>0$ tel que : $(22)\ \tilde{f} \ll {}^{\Gamma}\tilde{g}$

Désignons par $\tilde{f}^{**}$ le préitérateur de $\tilde{f}$ (voir déf. en A, I § 2).

Alors :

d'après Théor. 6 (A, I, §2) $\quad \tilde{f}^{**} = \lim\limits_{m\to\infty} a^{-m}\tilde{f}^{\circ m}$

d'après (22) $\quad \dots \ \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} a^{-m}\left({}^{\Gamma}\tilde{g}\right)^{\circ m}$

d'après le théorème 1,a de II ... $\quad \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} a^{-m}\ {}^{\Gamma}\left\{\tilde{g}^{\circ m}\right\}$

par linéarité de l'opérateur Γ .. $\quad = {}^{\Gamma}\left\{\lim\limits_{m\to\infty}\left(a^{-m}\tilde{g}^{\circ m}\right)\right\}$

d'après (21) $\quad \dots \ = {}^{\Gamma}\left\{z\left(1-k(1-a)^{-1}z\right)^{-1}\right\}$

Soit finalement :

$$\tilde{f}^{**} \ll {}^{\Gamma}\left\{z\left(1-k(1-a)^{-1}z\right)^{-1}\right\}$$

avec $k(1-a)^{-1} > 0$, ce qui exprime bien que $\tilde{f}^{**}$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, et par suite aussi $\frac{d}{dz}\tilde{f}^{**}$, puis $\left(\frac{d}{dz}\tilde{f}^{**}\right)^{-1}$, puis finalement $\tilde{f}_{*} = (\log a)\left(\frac{d}{dz}\tilde{f}^{**}\right)^{-1}\left(\tilde{f}^{**}\right)$, ce qui achève la démonstration.

§ 4 : NON-REGULARITE DE LA PRISE DE L'ITEREE FRACTIONNAIRE.

On continue de désigner par $\Gamma = \{\Gamma_n\}$ une suite de type $\mathcal{R}$.

Définition 3 :

On dit qu'un élément $\tilde{f}$ du groupe $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ est itérable d'ordre w (pour un certain w complexe), ou encore que w est un ordre d'itération admissible pour $\tilde{f}$ relativement à $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$, si $\tilde{f}^{\circ w}$, a priori élément de $\tilde{\mathcal{H}}$, appartient en fait à $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$. Cette définition vaut de même pour le sous-groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ de $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$.

On désigne par $W_{\tilde{f}}\{\Gamma_n\}$, ou simplement par $W_{\tilde{f}}$ lorsqu'il n'y a pas à craindre d'ambiguité, l'ensemble des ordres d'itération admissibles de $\tilde{f}$. $W_{\tilde{f}}$ est manifestement un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ et un surgroupe de $\mathbb{Z}$.

Lorsque $W_{\tilde{f}} = \mathbb{C}$, on dit que $\tilde{f}$ est pleinement itérable dans $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ (resp $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$).

Enfin, on désigne par $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ l'ensemble des $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ qui sont pleinement itérables.

Théorème 4 :

a) Toute $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ et de valuation itérative nulle est pleinement itérable (et par suite, seule présente de l'intérêt l'étude du sous-groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$).

b) Une conditions nécessaire et suffisante pour qu'une $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ soit pleinement itérable, est que $\tilde{f}_*$ soit de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$.

c) Une condition suffisante pour qu'une $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ à coefficients réels soit itérable pour tout w complexe est qu'elle soit itérable pour tout w réel.

N. B. Pour certaines classes, et en particulier pour $\{\Gamma_n \equiv 1\}$, cette condition vaut pour toutes les $\tilde{f}$, que leurs coefficients soient réels ou non.

d) Si une $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ n'est pas pleinement itérable, $W_{\tilde{f}}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{C}$. Pour certaines $\{\Gamma_n\}$ données, $W_{\tilde{f}}$ peut alors revêtir dans tous les cas une forme encore plus particulière. Par exemple, si $\Gamma_n \equiv 1$, $W_{\tilde{f}}$ est nécessairement de la forme $n^{-1}\mathbb{Z}$ (n entier) si $\tilde{f}$ n'est pas itérable.

e) L'ensemble $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ des $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ qui sont pleinement itérables ne coïncide en général pas avec $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ tout entier. En particulier, il est certain que si $\theta \in [0\,1[$, $\tilde{\mathcal{G}}\{n^{+\theta}\}$ contient des $\tilde{f}$ non itérables (et c'est probablement vrai de tous les $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$).

Démonstration du théorème 4, a :

C'est immédiat. En effet, d'après le théorème 3, si $\tilde{f}$ appartient à $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ et est de valuation itérative nulle, alors $\tilde{f}_*$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ et d'après le théorème 2, $\tilde{f}^{\circ w}$ est alors dans $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n\}$ pour tout w

Démonstration du théorème 4, b :

La condition est évidemment suffisante, car, d'après le théorème 2 si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, $\tilde{f}^{\circ w} \in \tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Reste à montrer que la condition est nécessaire. Pour cela, nous allons devoir utiliser un lemme, dû à Jabotinsky et utilisé par cet auteur dans [14] pour traiter un cas particulier du problème que nous examinons.

Nous donnons de ce lemme un énoncé légèrement modifié. On désigne par $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}$ et $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}$ les mesures de Lebesgue le $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

Lemme 1 :

Cas complexe : Soit $P(w)$ un polynôme à coefficients complexes et de degré ν

en w, soit λ un réel de $[0\,1]$ et s un réel > 0. Il existe une constante universelle C_1 (i. e. indépendante de P, ν, λ, s) telle que :

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}\,\{w\,;\ |w| < s\ ;\ |P(w)/P(0)| \leq \lambda\}\ C_1\,\lambda^{1/1+\nu}\,s$$

<u>Cas réel</u> : Soit $P(w)$ un polynôme à coefficients réels et de degré ν en w réel, soit λ un réel de $[0\,1]$ et s un réel > 0. Il existe une constante universelle C_2 telle que :

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\,\{w\,;\ -s \leq w \leq s\ ;\ |P(w)/P(0)| \leq \lambda\} \leq C_2\,\lambda^{1/1+\nu}\,s$$

Pour la démonstration du lemme 1, nous renvoyons à [14]

Nous allons tirer de là un second lemme, qui nous servira à plusieurs reprises dans la suite. En vue surtout des applications ultérieures, nous donnons à ce lemme 2 une forme légèrement plus compliquée que celle qui suffirait à traiter le cas qui nous occupe présentement.

<u>Lemme 2</u> : Soit $\mathbb{E}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et soit $\delta(n)$ une fonction affine non constante, de n, telle que $\delta(\mathbb{E}) \subset \mathbb{N}$.
Soit en outre $\tilde{f}_w(z) = \sum_{n \in \mathbb{E}} a_n(w)\, z^{n+1}$, où $a_n(w)$ est un polynôme en w de degré $\delta(n)$.

Alors, si $\tilde{f}_w$ (considéré comme développement en z) n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ pour un certain $w = w_0$, $\tilde{f}_w$ n'appartient à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ pour presque aucun w complexe (et pour presque aucun w réel si les $a_n(w)$ sont des polynômes à coefficients réels).

<u>Démonstration</u> :

Si $\tilde{f}_{w_0} \notin \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, alors il existe une suite $\{n_q\}$ d'entiers telle que

$$(22)\qquad \frac{1}{\Gamma_{n_q}}\,|a_{n_q}(0)|^{1/n_q} \geq q \quad ;\ \forall q$$

et inversement si $\tilde{f}_w \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, il existe $k = k(w) > 0$ telle que :

(23) $$\frac{1}{\Gamma_n} \left| a_n(w) \right|^{1/n} \leq k(w) \quad ; \forall n.$$

De (22) et (23) on tire :

(24) $$\left| a_{n_q}(w) / a_{n_q}(0) \right| > \left(k(w)/q \right)^{n_q} \quad ; \forall q.$$

Désignons par $V_{s,m,q}$ l'ensemble des w complexes du disque $|w|<s$ et tels que

(25) $$\left| a_{n_q}(w) / a_{n_q}(0) \right| > (m/q)^{n_q}$$

Compte tenu de (24), il est clair que si l'on désigne par V l'ensemble des w tels que $\tilde{f}_w \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, on aura :

(26) $$V \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{q=1}^{\infty} V_{s,m,q} \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{q=m}^{\infty} V_{s,m,q}$$

Mais lorsque $m \leq q$, on peut appliquer le lemme 1 à (25) en prenant $v = \delta(n_q)$ et $h = (m/q)^{n_q}$ et conclure que :

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}\left(V_{s,m,q} \right) \leq C_1 \, (m/q)^{n_q / 1+\delta(n_q)} s^2$$

Puisque $n_q / \delta(n_q)$ tend vers une limite >0 quand $q \to +\infty$, on déduit de (27) que $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}} \left\{ \bigcap_{q=m}^{\infty} V_{s,m,q} \right\} = 0$ et donc que $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}(V) = 0$.
Le cas réel se traite de même, et ceci démontre le lemme 2. Appliquons-le maintenant à la démonstration de la nécessité du critère de pleine itérabilité indiqué au théorème 4, b. Posons pour cela

$$\begin{cases} \tilde{f}_*(z) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^{n+1} \\ w^{-1}\left(\tilde{f}^{\circ w}(z) - z \right) = \sum_{n \geq 1} A_n(w) \, z^{n+1} \end{cases}$$

En se reportant au théorème 2, de A, I, § 1, on établit facilement que $A_n(w)$ est un polynôme de degré $\delta(n)$ affine en n, et que $A_n(0) = \alpha_n$.

Donc, si $\tilde{f}_*$ n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, alors, en vertu du lemme 2, $w^{-1}\left\{ \tilde{f}^{\circ w}(z) - z \right\}$, et par suite aussi $\tilde{f}^{\circ w}$, n'appartiennent à $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ pour presque aucun w complexe, et $\tilde{f}$ ne saurait être pleinement itérable.
c.q.f.d.

Démonstration du théorème 4, c :

Montrons que dans ce cas, si $\tilde{f}$ *n'est pas itérable pour tous les* w *complexes, il n'est pas non plus itérable pour tous les* w *réels. En effet, si* $\tilde{f}$ *est non pleinement itérable, d'après le point b,* $\tilde{f}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$. *Mais si* $\tilde{f}$ *est à coefficients réels, il en est de même de* $\tilde{f}_*$ *et des polynômes* $A_n(w)$ *définis plus haut. Par suite on peut appliquer la clause du lemme 2 relative au cas réel, et en raisonnant comme ci-avant, montrer que* $w^{-1}(\tilde{f}^{\circ w}(z) - z)$ *et* $\tilde{f}^{\circ w}$ *n'appartiennent à* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *pour presqu'aucun* w *réel.*

Démonstration du théorème 4, d :

On vient de voir que si $\tilde{f}$ *n'est pas pleinement itérable dans* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *alors* $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}(W_{\tilde{f}}) = 0$. *Cela pourrait d'ailleurs s'établir plus directement (sans utiliser les lemmes 1 et 2) : en effet, on prouverait facilement que* $W_{\tilde{f}}$ *est borélien, donc mesurable, et comme c'est un sous-groupe strict de* $\mathbb{C}$, *cela implique* $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}}(W_{\tilde{f}}) = 0$.

Enfin, la remarque concernant la classe $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$ *résultera, grâce à l'isomorphisme* $\tilde{\mathcal{G}}\{1\} \to \mathcal{G}_k$, *des résultats correspondants, qui seront établis indépendamment pour le groupe* $\mathcal{G}_k$ *(Voir A, III et B).*

Démonstration du théorème 4, e :

En effet, d'après le théorème 3, si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, $\tilde{f}_*$ *n'appartient en général pas à* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, *et d'après le théorème 4, b), si* $\tilde{f}_* \notin \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$, *alors* $\tilde{f}$ *n'est pas pleinement itérable.*

De la même manière, la remarque du point e) concernant $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ *(pour* $\theta \in [0,1[$*) résulte du théorème 3, a bis (A, II § 3) et du point b) du présent théorème 4.*

CHAPITRE III

LA THEORIE ITERATIVE DANS LES GROUPES $\mathcal{G}_h$ ET $\mathcal{H}_h$ DE TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES.

§ 1 : GENERALITES. EXISTENCE ET EXEMPLES DE FONCTIONS NON PLEINEMENT ITERABLES.

Définition 1 :

a) On désigne par $\mathcal{K}_h$ $\left(\text{resp } \mathcal{H}_h ; \mathcal{G}_h\right)$ le groupe des germes de fonctions f, holomorphes au voisinage de l'origine et telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$ $\left(\text{resp } f'(0) > 0 ; f'(0) = 1\right)$.

La loi de groupe de $\mathcal{K}_h$, $\mathcal{H}_h$ et $\mathcal{G}_h$ est la composition des applications : $(f, g) \to f \circ g$ avec $f \circ g(z) = f(g(z))$.

[En vertu de l'unicité du prolongement analytique, on n'introduira pas de notations différentes pour les germes et leurs représentants].

b) Le groupe $\mathcal{K}_h$ $\left(\text{resp } \mathcal{H}_h ; \mathcal{G}_h\right)$ est isomorphe au groupe $\tilde{\mathcal{K}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$ $\left(\text{resp } \tilde{\mathcal{H}}\{1\} ; \tilde{\mathcal{G}}\{1\}\right)$ par la correspondance $f \to \tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est défini par la condition naturelle :

$$\left(\frac{d^m}{dz^m} \tilde{f}\right)(0) = \left(\frac{d^m}{dz^m} f\right)(0) \quad ; \forall m \in \mathbb{N}$$

c) La série formelle $\tilde{f}$, en tant qu'élément de $\tilde{\mathcal{H}} \supset \tilde{\mathcal{H}}\{1\}$ ou de $\tilde{\mathcal{G}} \supset \tilde{\mathcal{G}}\{1\}$ possède (voir chapitre I) un logarithme itératif $(\tilde{f})_* = \mathrm{logit}(\tilde{f})$ qui est une série formelle appartenant à $\tilde{\mathcal{E}}$.

D'après le théorème II,3, $(\tilde{f})_*$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{n\}$, mais pas nécessairement de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{1\}$. Lorsque toutefois $(\tilde{f})_*$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{1\}$, $(\tilde{f})_*$ est le développement de Taylor en 0 d'une fonction holomorphe en 0, et que nous noterons f_*, ou $\mathrm{logit}\, f$. Nous dirons alors que l'élément f de $\mathcal{G}_k$ ou de $\mathcal{H}_k$ <u>possède un logarithme itératif global</u> (par opposition aux logarithmes itératifs sectoriels, introduits plus loin).

d) Enfin, une f de $\mathcal{H}_k$ (resp $\mathcal{G}_k$) sera dite "$\mathbb{C}$ - itérable" ou "pleinement itérable" lorsque pour tout w complexe, l'élément $(\tilde{f})^{ow}$ de $\tilde{\mathcal{K}}\{n\} \subset \tilde{\mathcal{K}}$ appartient en fait à $\tilde{\mathcal{K}}\{1\}$. L'élément de $\mathcal{K}_k$ qui lui correspond alors sera noté f^{ow} et appelé "itérée (généralisée) d'ordre complexe w" de f.

<u>N. B.</u> : Si $w \in \mathbb{C}$: $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}} \Rightarrow (\tilde{f})^{ow} \in \tilde{\mathcal{G}}$ mais :

$\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}} \Rightarrow$ (seulement) $(\tilde{f})^{ow} \in \tilde{\mathcal{K}}$.

On désigne par $I\mathcal{H}_k$ (resp $I\mathcal{G}_k$) l'ensemble des f pleinement itérables de $\mathcal{H}_k$ (resp $\mathcal{G}_k$).

e) Pour tout f de $\mathcal{H}_k$ ou $\mathcal{G}_k$ on pose : $\mathrm{valit}\, f = \mathrm{valit}(\tilde{f})$ et $\mathrm{résit}\, f = \mathrm{résit}(\tilde{f})$

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui donne des critères de pleine itérabilité, et indique des exemples explicites de fonctions pleinement itérables (Pour des exemples et des critères de non-pleine itérabilité, voir théorème 2 du présent chapitre).

<u>Théorème 1</u> : (Critères de pleine itérabilité holomorphe).

a) Tout élément f de $\mathcal{H}_k$ et de valuation itérative nulle est pleinement itérable.

b) Pour qu'un élément f *de* $\mathcal{G}_k$ *soit pleinement itérable, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

(α) f *possède un logarithme itératif global (Voir déf. 1)*

(β) *Il existe une fonction* φ *, holomorphe en* 0 *et telle que* $\varphi \circ f = f' \varphi$ *et* $f(z) - z \sim \varphi(z)$ *quand* $z \to 0$. [*Si une telle* φ *existe, elle est nécessairement unique, et coïncide avec le logarithme itératif global* f_* *de* f].

c) Inversement, toute fonction φ *, holomorphe en* 0 *et de la forme* $\varphi(z) = \underline{O}\,(z^{p+1})$ $(p \geq 1)$ *est le logarithme itératif global d'un certain élément* f *de* $\mathcal{G}_k$ (*et en fait de* $I\mathcal{G}_k$) *et valit* $f = p$. *Si on désigne par* $\mathcal{E}_{q,k}$ *l'ensemble des fonctions holomorphes de la forme* $\varphi(z) = O(z^q)$ *on a ainsi une correspondance biunivoque :* $f \to$ *logit* f *entre* $I\mathcal{G}_k$ *et* $\mathcal{E}_{2,k}$.

d) Soit f *un élément pleinement itérable de* $\mathcal{H}_k$ *ou* $\mathcal{G}_k$ *, soit* f_* *son logarithme itératif global, et* $f^{\circ w}$ *ses itérées d'ordre complexe* w . *Alors pour tout* $w \in \mathbb{C}$:

(I) $\displaystyle\int_z^{f^{\circ w}(z)} \frac{d\zeta}{f_*(\zeta)} = w$ *pour tout* z *assez voisin de l'origine et pour tout chemin d'intégration lui aussi assez voisin de l'origine et homéotope au segment* $[z, f^{\circ w}(z)]$ *par rapport à l'origine. Autrement dit,* f^* *désignant au voisinage de* 0 *une primitine (en général non uniforme) de* f_*^{-1} *, on a, pour* z *et* $f^{\circ w}(z)$ *assez voisins de* 0 *:*

(2) $f^* \circ f^{\circ w}(z) = w + f^*(z)$ *, et (2) caractérise* $f^{\circ w}$ *comme élément de* $\mathcal{H}_k$ *ou* $\mathcal{G}_k$.

Celle des primitines de f_*^{-1} *qui est de la forme*

$$f^*(z) = \rho \log z + \sum_{n \geq -p} c_n z^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_0 = 0 \\ \text{resit}\, f = \rho \\ \text{valit}\, f = p \end{cases}$$

est dite <u>itérateur global de $\mathfrak{f}$</u> .

e) Si deux éléments $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{H}_k$ ou $\mathcal{G}_k$ sont conjugués par rapport à un élément $\mathfrak{k}$ de $\mathcal{K}_k$ (i. e. $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{k}=\mathfrak{k}\circ\mathfrak{g}$), alors $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ sont <u>simultanément</u> soit pleinement itérables soit non pleinement itérables.

Ce théorème sert d'introduction au présent chapitre ; sa démonstration est simple et fait appel essentiellement aux résultats établis dans les deux chapitres précédents.

<u>Démonstration du théorème 1-a</u>.

D'après le théorème 4 (A, II, § 4), si $\tilde{\mathfrak{f}} \in \tilde{\mathcal{H}}\{1\} \subset \tilde{\mathcal{H}}$ et si valit $\tilde{\mathfrak{f}} = 0$, alors $(\tilde{\mathfrak{f}})^{\circ w}$, a priori élément de $\tilde{\mathcal{H}}$, est en fait un élément de $\tilde{\mathcal{H}}\{1\}$. D'où le résultat, par l'isomorphisme :

$$\mathcal{H}_k \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}\{1\}$$

<u>Démonstration du théorème 1-b</u>.

Au théorème I, 1-c) on trouve énoncées les propriétés caractéristiques des logarithmes itératifs d'éléments de $\tilde{\mathcal{G}}$. Utilisant les isomorphismes naturels :

$$\mathcal{G}_k \to \tilde{\mathcal{G}}\{1\} \subset \tilde{\mathcal{G}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{2,k} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2\{1\} \subset \tilde{\mathcal{E}}_2$$

on voit que les conditions (α) et (β) sont équivalentes.

Montrons que la pleine itérabilité d'une $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{G}_k$ équivaut à (α) . En effet, si $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{G}_k$ est pleinement itérable, cela équivaut à la pleine itérabilité de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}\{1\}$, qui elle-même équivaut à l'appartenance de $(\tilde{\mathfrak{f}})_*$ à la classe $\tilde{\mathcal{E}}\{1\}$ (Voir théorème 4 (A, II § 4)).

<u>Démonstration du théorème 1-c, d, e</u>.

Ici encore, grâce à l'isomorphisme : $\mathfrak{f} \to \tilde{\mathfrak{f}}$, il suffit d'invoquer les résultats correspondants relatifs au groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{1\}$. (Voir (A,II)).

<u>Remarque</u> : On tire du théorème 1- c, e) le moyen de construire un grand

nombre de fonctions pleinement itérables. Par exemple, on calcule aisément les éléments ℓ_p *de* $\mathcal{G}_k$ *dont les logarithmes itératifs globaux sont* $(\ell_p)_*(z) = z^{p+1}$ *; ils valent :* $\ell_p(z) = z(1-pz^p)^{-1/p}$ *et pour tout complexe* w *, leurs itérées d'ordre* w *valent :*

$$\ell_p^{\circ w}(z) = z(1 - wpz^p)^{-1/p}$$

. Par suite, pour tout p *entier et* $\geqslant 1$ *et tout élément* k *de* $\mathcal{K}_k$ *, d'inverse* $k^{\circ(-1)}$ *dans* $\mathcal{K}_k$*, l'élément de* $\mathcal{G}_k$ *qui vaut :*

$$^c k.\ell_p = k^{\circ(-1)} \circ \ell_p \circ k$$

est pleinement itérable, i. e. il appartient à $I\mathcal{G}_k$ *. Toutefois, aussi nombreux que paraissent les éléments de* $I\mathcal{G}_k$ *, nous allons montrer qu'en un certain sens, le complémentaire* $\mathcal{G}_k \dot{-} I\mathcal{G}_k$ *de* $I\mathcal{G}_k$ *est encore plus vaste. Ce sera l'objet du théorème 2 qui suit et dont les résultats seront considérablement précisés et complétés par les énoncés du chapitre IV, qui clôt la partie A. ("théorèmes d'extrémalité").*

Rappelons que, par définition, pour tout élément f *de* $\mathcal{G}_k$ *:* *valit* f = *valit* $\tilde{f}$ *et résit* f = *résit* $\tilde{f}$.

Du théorème A, I, 4, il résulte que si deux éléments f *et* g *de* $\mathcal{G}_k$ *sont conjugués par rapport à un élément* k *de* $\mathcal{K}_k$*, alors* f *et* g *ont même valuation itératique et même résidu itératif. Toutefois on verra que la réciproque n'est pas vraie (alors qu'elle l'est pour* $\tilde{\mathcal{G}}$ *).*

C'est là une différence capitale, qui sera à la base de la partie B et servira de point de départ à la recherche des "invariants holomorphes".

Signalons un lemme utile dans les applications.

Lemme 1 : On peut calculer le résidu itératif ρ *de tout élément* f *de* $\mathcal{G}_k$ *directement (i.e. sans passer par le logarithme itératif* $(\tilde{f})_*$ *de* $\tilde{f}$ *) en utilisant la relation qui suit :*

(3) $$\text{résit } f = \text{Res}\left\{z = 0 ; (f(z) - z)^{-1}\right\} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{valit } f .$$

Démonstration :

D'après le théorème (A, I, § 2)-2 nous avons, si valit $f = p$ *:*

$$\begin{cases} \tilde{f}(z) = z + \tilde{f}_*(z) + \frac{1}{2}\, \tilde{f}_*'(z)\, \tilde{f}_*(z) + \underline{O}(z^{3p+1}) & (4) \\ \tilde{f}_*(z) = \underline{O}(z^{p+1}) & (5) \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\left(\tilde{f}(z) - z\right)^{-1} = \left(\tilde{f}_*(z)\right)^{-1} - \frac{1}{2}\, \tilde{f}_*'(z)/\tilde{f}_*(z) + \tilde{\underline{O}}(z^{p-1}) .$$

Or le coefficient de z^{-1} *dans* $\left(\tilde{f}_*(z)\right)^{-1}$ *est, par définition, résit* $\tilde{f}$ *, c'est-à-dire résit* f *, et, d'après (5), le coefficient de* z^{-1} *dans* $\left\{-\frac{1}{2}\tilde{f}_*'(z)/\tilde{f}_*(z)\right\}$ *est* $-\frac{1}{2}(1+p)$.

D'où la formule (3) du lemme 1.

Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème annoncé :

<u>Théorème 2</u> : <u>(Critères de non-pleine itérabilité, et non stabilité de</u> $I\mathcal{G}_{f_k}$ *<u>pour la composition)</u>.*

a) <u>(Critères de non-pleine itérabilité)</u>(**)

Si un élément f *de* $\mathcal{G}_k$ *possède les propriétés* $\mathcal{P}_1$ *<u>et</u>* $\mathcal{P}_2$ *suivantes, il n'est pas pleinement itérable (i.e.* $f \notin I\mathcal{G}_{f_k}$*)*

$(\mathcal{P}_1)$ *: résit* $f \neq 0$.

$(\mathcal{P}_2)$ *: il existe un sous-ensemble* $E = E(f)$ *de* $\mathbb{C}$ *, fermé, au plus dénombrable, ne contenant pas l'origine et tel que* f *soit prolongeable analytiquement à partir de l'origine, le long de tout chemin de* $\mathbb{C} \dot{-} E$ *et donne naissance à une fonction <u>finiment multiforme</u> dans* $\mathbb{C} \dot{-} E$.

b) Si on pose $f(z) = z + \sum_{n \geq 1} a_n z^{n+1}$ *, la condition* $(\mathcal{P}_1)$ *admet l'expression analytique suivante :*

si valit $f = 1$

$$\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 - a_1^2 \neq 0 \end{cases}$$

(**) Dans le cas particulier où valit $f = 1$*, le point a) a été démontré par I. N. Baker.*

si valit $f = 2$ $\quad \begin{cases} a_1 = 0 \;;\; a_2 \neq 0 \\ 3a_2^3 + 2a_3^2 - 2a_2a_5 \neq 0 \end{cases}$

si valit $f = 3$ $\quad \begin{cases} a_1 = a_2 = 0 \;;\; a_3 \neq 0 \\ 2a_3a_4a_5 + 2a_3^4 - a_3^2 a_6 - a_4^3 \neq 0 \end{cases}$

etc ...

c) La condition (P_2) *est automatiquement vérifiée notamment lorsque* f *est de la forme* $f_1 + f_2$ *, où* f_1 *est le germe (en* 0 *) d'une fonction méromorphe dans tout le plan complexe (et holomorphe en* 0 *) et où* f_2 *est le germe d'une fonction algébrique.*

(Ceci englobe évidemment les f *entières).*

d) (Non Stabilité de $I\mathcal{G}_k$ *pour la composition :*
$(I\mathcal{G}_k) \circ (I\mathcal{G}_k) \not\subset I\mathcal{G}_k$ *).*

Pour tout entier $p \geq 1$*, on désigne par* ℓ_p *l'élément de* $\mathcal{G}_k$ *(et en fait de* $I\mathcal{G}_k$ *), de valuation itérative* p *, et défini par :* $\ell_p(z) = z\,(1 - pz^p)^{-1/p}$ *au voisinage de* 0 *(détermination principale de* $(\ldots)^{-1/p}$ *).*

Soient h *et* k *deux éléments de* $\mathcal{H}_k$ *qui sont des germes de fonctions algébriques, et* $h^{\circ(-1)}$, $k^{\circ(-1)}$ *leurs inverses dans* $\mathcal{H}_k$ *. Alors, les éléments* g_1 *et* g_2 *de* $\mathcal{G}_k$ *définis par :*

$$\begin{cases} (6) \quad g_1 = h^{\circ(-1)} \circ \ell_p \circ h \\ (7) \quad g_2 = k^{\circ(-1)} \circ \ell_q \circ k \end{cases} \qquad \begin{cases} p \neq q \\ p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sont pleinement itérables, ainsi, bien entendu, que leurs itérées générales d'ordre complexes u *et* v *(i.e.* $g_1, g_2, g_1^{\circ u}, g_2^{\circ v} \in I\mathcal{G}_k \;\forall u,v$*) mais l'élément* $g_{u,v}$ *de* $\mathcal{G}_k$ *défini par :*

$$(8) \qquad g_{u,v} = g_1^{\circ u} \circ g_2^{\circ v}$$

n'est pas pleinement itérable en général.

Plus précisément :

(α) si $1/2 < p/q < 1$ ou si $1/2 < q/p < 1$, $g_{u,v}$ n'est en général pleinement itérable pour presque aucun $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.

(β) si $p = 2q$ ou si $q = 2p$, $g_{u,v}$ n'est pleinement itérable pour aucun (u,v) tel que $uv \neq 0$.

<u>Il en résulte que $I\mathcal{G}_{g_k}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{G}_{g_k}$</u> (**)

<u>Démonstration du théorème 2.a)</u>

Nous aurons besoin du lemme facile suivant, que nous énonçons sans démonstration :

<u>Lemme 2</u> : Si deux éléments f et g de $\mathcal{G}_{g_k}$ vérifient $(\mathcal{P}_2)$ alors $f \circ g$ également vérifie $(\mathcal{P}_2)$, et par suite aussi : $f^{\circ n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de montrer l'absurdité des hypothèses (H_1) suivantes :

$$H_1 \left\{ f \in I\mathcal{G}_{g_k} \; ; \; \text{resit}\, f = \rho \neq 0 \; ; \; f \text{ vérifie } (\mathcal{P}_2) \right\}$$

Mais f est nécessairement de la forme :

$$f(z) = z + \underline{O}(z^{p+1}) \quad ; \; p \geq 1 .$$

Or un changement de variable $z \to k(z) = cz\,(c \neq 0)$ transmute f en g $(g = {}^c k.f)$ avec $g(z) = c^{-1} f(cz)$ et par suite il existe un $c \neq 0$ tel que

$$g(z) = z - z^{p+1} + o(z^{p+1}).$$

Comme d'autre part le changement de variable $z \to k(z)$ laisse invariant le résidu itératif et, en vertu du théorème 1-e, préserve la pleine-itérabilité, on est ramené à démontrer l'absurdité des hypothèses (H_2) suivantes :

$$H_2 \begin{cases} f \in I\mathcal{G}_{g_k} \; ; \; \text{resit}\, f = \rho \neq 0 \; ; \; f \text{ vérifie } \mathcal{P}_2 \\ f(z) = z - z^{p+1} + o(z^{p+1}) \; ; \; \text{avec } p = \text{valit}\, f \geq 1 \end{cases}$$

(**) C'est même, en quelque sorte, l'"exact contraire" d'un sous-groupe : voir à ce sujet les théorèmes d'"extrémalité" de A, chapitre IV.

D'après le théorème 1, b) un tel f possède un logarithme itératif global f_*. Or $f_*(z) \sim f(z) - z$ et par suite $f_*(z) = -z^{p+1} + o(z^{p+1})$.

Par suite l'itérateur global f^* de f est une fonction multiforme du type

(9)

$$f^*(z) = \rho \log z + \Phi(z) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Phi(z) = \sum_{n \geqslant -p} c_n z^n \\ c_{-p} = p^{-1} \; ; \; c_0 = 0 \; ; \; p \geqslant 1 \\ z^p \Phi \text{ holomorphe en } 0. \end{cases}$$

et pour toute détermination de $\log z$, tout $w \in \mathbb{C}$ et tout z voisin de l'origine, nous aurons d'après le théorème 1 (A, I § 1) :

(10) $f^* \circ f^{ow}(z) = w + f^*(z)$ (Prenons maintenant pour $\log z$ la détermination principale).

Puisque l'itérateur f^* est de la forme (9) il est possible de trouver deux régions P et S du plan complexe telles que :

(i) P est un demi-plan $\mathcal{R}e\, z > x > 0$.

(ii) S est un ouvert, contenant un intervalle $]0, x'[$ de l'axe réel et admettant pour frontière au voisinage de l'origine deux arcs de courbes, ayant en 0 des tangentes inclinées de $\pm \frac{\pi}{2p}$ sur l'axe réel.

(iii) l'application $z \to f^*(z)$ (pour la détermination principale de $\log z$) réalise une bijection holomorphe de S sur P. On note ${}^*f$ la bijection réciproque de P sur S.

Soit maintenant un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que $\Phi(z) = f^*(z) - \rho \log z$ soit holomorphe sur $\mathcal{V} \dot{-} \{0\}$ et soit un contour Γ contenu dans $\mathcal{V} \dot{-} \{0\}$, <u>d'indice + 1</u> par rapport au point 0, coupant le demi axe $z > 0$ en un point unique A. Lorsque z parcourt Γ dans le sens positif, de A à A (voir figure 1), une fois, $f^*(z)$ parcourt un certain arc Γ_0, d'extrémités B_0 et B_1, où $\overrightarrow{B_0 B_1}$ a pour affixe $2\pi i \rho \neq 0$, à cause du caractère multiforme de f^*.

On peut ensuite choisir un entier k positif et assez grand pour que le contour $\Gamma_0 + k$ (c'est-à-dire le translaté de Γ_0 par $+k$) soit entièrement *contenu dans le demi-plan* P. *Soient* Γ_k^+ (*resp.* Γ_k^-) *les courbes décrites par* $k + f^*(z)$ *quand* z *parcourt* Γ *à partir de A, en tournant indéfiniment dans le sens positif (resp. négatif).*

Alors
$$\begin{cases} \Gamma_k^+ = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\Gamma_0 + k + n\, 2\pi i \rho \right) \\ \Gamma_k^- = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\Gamma_0 + k - n\, 2\pi i \rho \right) \end{cases}$$

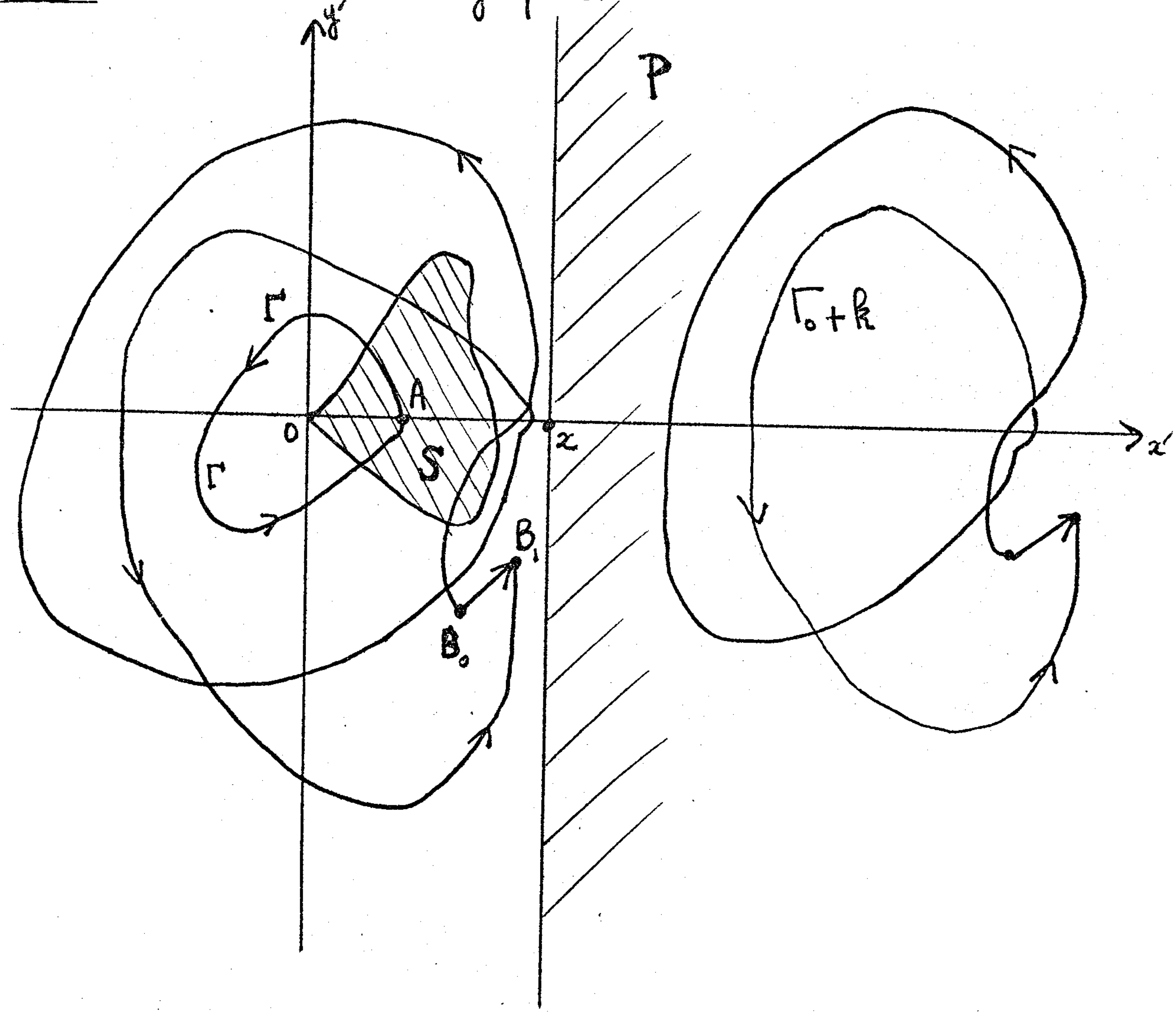
Si $\mathcal{R}e(2\pi i\rho) \geqslant 0$ (*resp si* $\mathcal{R}e(2\pi i\rho) \leqslant 0$) *la courbe* Γ_k^+ *toute entière (resp. la courbe* Γ_k^- *toute entière) est contenue dans le demi-plan* P. *Or* f *est uniforme et univalente sur* P *et par suite en faisant tourner* z *autour de l'origine, selon le contour* Γ, *à partir du point A, indéfiniment et dans le sens positif (resp. négatif), et en tenant compte de*

$$f^{\circ k}(z) = {}^*f\left(k + f^*(z)\right)$$

on voit qu'on obtient, à partir du point $A \in S$, *un prolongement analytique de* $f^{\circ k}$, *et que ce prolongement possède une infinité de branches, situées "sur" le domaine* $\mathcal{V} \dot{-} \{0\}$.

Donc $f^{\circ k}$ *ne vérifie pas* $(\mathcal{P}_2)$ *et d'après le lemme 2 cela implique que* f *non plus ne vérifie pas* $(\mathcal{P}_2)$. *On aboutit donc à une contradiction avec les hypothèses* H_2 *et ceci achève de démontrer le théorème 2.a.*

Figure 1 : (dans le cas où valit $f=\mu=2$).



Démonstration du théorème 2, b-c.

Le point c est immédiat, et le point b résulte de calculs simples effectués à partir de la formule (3) du lemme 1 qui permet d'exprimer resit f directement en fonction des coefficients de Taylor de f.

Démonstration du théorème 2,d.

D'après le théorème 1.e, les éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{G}_k$ sont pleinement itérables, puisqu'ils sont conjugués (par rapport à des éléments de $\mathcal{H}_k$) à ℓ_p et ℓ_q, eux-mêmes pleinement itérables. Or pour tout $(u,v)\in\mathbb{C}^2$, les trois éléments de $\mathcal{G}_k$: $g_1^{\circ u}$; $g^{\circ v}$ et $g_1^{\circ u}\circ g_2^{\circ v}$ sont des germes de fonctions algébriques(**). D'après le théorème 2.a $g_1^{\circ u}\circ g_2^{\circ v}$ ne peut éventuellement être pleinement itérable que lorsque $\rho(u,v) = \text{résit}\,(g_1^{\circ u}\circ g_2^{\circ v}) \neq 0$.

(**) et donc satisfont $(\mathcal{P}_2)$.

Mais d'après le théorème 2 (A, I, §1) :

(11) logit $\left(g_1^{\circ u} \circ g_2^{\circ v}\right)(z) = u\,\tilde{g}_{1*}(z) + v\,\tilde{g}_{2*}(z) + \frac{1}{2}\left[\tilde{g}_{1*}, \tilde{g}_{2*}\right](z) + \dots$

D'où :

(12) $$\begin{cases} \text{logit}\left(g_1^{\circ u} \circ g_2^{\circ v}\right)(z) = u\, g_{1*}(z) + v\, g_{2*}(z) + O(z^{p+q+1}) \\ g_{1*}(z) = \underline{O}(z^{p+1}) \quad ; \quad g_{2*}(z) = \underline{O}(z^{q+1}) \end{cases}$$

D'où les relations :

*) si $p=q$: $\rho(u,v) = \underset{z=0}{\text{Res}}\left\{\left(u\,g_{1*}(z) + v\,g_{2*}(z)\right)^{-1}\right\}$ avec $\begin{cases} g_{1*}(z) = \underline{O}(z^{p+1}) \\ g_{2*}(z) = \underline{O}(z^{p+1}) \end{cases}$

**) si $p<q<2p$: $\rho(u,v) = \sum_{n=0}^{n<p/q-p} (-1)^n \frac{v^n}{u^{n+1}} \underset{z=0}{\text{Res}}\left\{g_{2*}^{n}(z)\, g_{1*}^{-n-1}(z)\right\}$

avec $\underset{z=0}{\text{Res}}\left\{g_{1*}^{-1}(z)\right\} = 0$ et $g_{2*}^{n}(z)\, g_{1*}^{-n-1}(z) = \underline{O}\left(z^{n(q-p)+p+1}\right)$

***) si $p=2q$: $\rho(u,v) = -\frac{u}{v^2} \text{Res}\left\{g_{1*}(z)\, g_{2*}^{-2}(z)\right\}$ avec $g_{1*}(z)\, g_{2*}^{-2}(z) = \underline{O}(z^{-1})$

[Les cas $q<p<2q$ et $q=2p$ se déduisent bien sûr des cas (**) et (***)]

A partir des relations ci-dessus on discute facilement les cas de nullité de $\rho(u,v)$ et on aboutit à l'énoncé du théorème 2-d.

§ 2 : LA THEORIE ITERATIVE DANS LE SEMI-GROUPE $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$. ITERATION "SECTORIELLE".

Les résultats du présent paragraphe nous serviront à deux reprises dans la suite : aux §§3 et 4 de ce chapitre, pour construire les éléments itératifs "sectoriels" et aussi pour démontrer l'important théorème concernant la réalité du groupe W_f des ordres d'itération admissibles d'un élément f de $\mathcal{G}_h$; enfin, aux §§ 2, 3 de la conclusion, lors de la sommation canonique de divers types de séries de Gevray divergentes.

Commençons par définir les principales notions dont nous aurons à nous servir dans la suite.

Définition 2 :

a) $\mathcal{D}$ étant un domaine de $\mathbb{C}$ et z_0 un point frontière de $\mathcal{D}$, on dira qu'une φ holomorphe sur $\mathcal{D}$ admet en z_0 un développement asymptotique (ou encore : un développement asymptotique faible) s'il existe une infinité de constantes c_n $(n \geq n_0)$ telles que pour tout n :

$$\varphi(z) = \sum_{r=n_0}^{r=n} c_r (z-z_0)^r + o\left((z-z_0)^n\right) \qquad (n_0 \in \mathbb{Z})$$

lorsque z tend vers z_0 à l'intérieur de $\mathcal{D}$. (Voir remarque 1 ci-dessous).

b) Pour tout entier $m \leq \infty$, on dira que φ admet en z_0 un développement asymptotique de force m si $\varphi^{(q)}$ admet un développement asymptotique (faible) en z_0, pour tous les $q \leq m$. Si $m = +\infty$, on parlera aussi de développement asymptotique fort. (Voir remarque 1).

c) Pour tous réels α, β, λ tels que : $\lambda > 0$; $\alpha < \beta$; $\beta - \alpha \leq 2\pi$ on introduit le secteur $V(\alpha,\beta;\lambda)$:

$$V(\alpha,\beta;\lambda) = \left\{ z = r e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad 0 < r < \lambda \quad \text{et} \quad \alpha < \theta < \beta \right\}$$

d) Pour tout réel θ on dira qu'une propriété a lieu "à la racine du rayon θ " si elle a lieu sur un certain secteur $V(\alpha,\beta;h)$ avec $\alpha<\theta<\beta$.

e) (Semi-groupes sectoriels $\mathcal{G}_{h^-}(V,p,m)$).

Soit V un secteur $V(\alpha,\beta;h)$ et soient p et m deux entiers tels que

$$0<p<\infty \;;\; 0\leqslant m\leqslant\infty \;;\; -\frac{\pi}{2p}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2p}$$

On désigne par $\mathcal{G}_{h^-}(V,p,m)$ l'ensemble des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(\mathcal{A})\begin{cases}(\alpha)\ f \text{ définie holomorphe sur } V \text{ et } f(V)\subset V.\\ (\beta)\ f \text{ admet en } 0 \text{ un développement asymptotique de force } m.\\ (\gamma)\ f(z)=z-az^{p+1}+o(z^{p+1}) \text{ avec } a>0 \text{, quand } z\to 0.\\ (\delta)\ 0<|f'(z)|<1 \text{ sur } V \text{ et } f'(0)\neq 0\\ (\varepsilon)\ \inf\limits_{z\in V} \mathcal{R}e\{f^{-p}(z)-z^{-p}\}>0 \qquad \text{(Voir remarque 2).}\end{cases}$$

Chaque f de $\mathcal{G}_{h^-}(V,p,m)$ définit un endomorphisme holomorphe du secteur V. On vérifie aisément que $\mathcal{G}_{h^-}(V,p,m)$ est un semi-groupe pour la composition des endomorphismes. L'itéré d'ordre entier d'un f de $\mathcal{G}_{h^-}(V,p,m)$ sera noté $f^{\circ n}$. On note que pour tout z de V, $f^{\circ n}(z)\to 0$ quand $n\to\infty$. (Voir remarque 2).

Remarque 1 : La notion de développement asymptotique faible utilisée ici correspond à la notion classique, qui remonte à Poincaré. Si le domaine $\mathcal{D}$ est contenu dans un secteur issu de z_0 et d'angle $<2\pi$, les fonctions holomorphes de $\mathcal{D}$ ne sont pas caractérisées par leur éventuel développement asymptotique faible, ni même fort, en z_0.

Plus précisément, $\mathcal{D}$ étant un domaine (pour simplifier : convexe et borné) et $z_1, z_2 \ldots z_n$ n points-frontière de $\mathcal{D}$, alors il existe une infinité de φ holomorphes dans $\mathcal{D}$ et admettant en z_i un développement asymptotique donné à l'avance (au moyen de constantes $\{C_{i,n}\}$ choisies arbitrairement).

<u>Remarque 2</u> : Les conditions (δ) et (ε) du système $(\mathcal{A})$ ne figurent ici que pour simplifier les raisonnements ultérieurs. On pourrait en fait s'en dispenser. De plus, (ε) est moins artificielle qu'il ne paraît, car si (β) et (γ) sont vérifiées sur V, (ε) est automatiquement vérifiée sur le secteur $V(\alpha,\beta;k')\subset V$ pour tout k' assez petit.

<u>Lemme 3</u> : Soit f une fonction de $\mathcal{G}_{h-}(V,p,0)$
Alors, pour tout $r>p$ la série $\sum_n [f^{\circ n}(z)]^r$ est normalement convergente sur V et l'on a :

(II) $$\sum_{n\geqslant 0}\left[f^{\circ n}(z)\right]^r = O\left(z^{r-p}\right)$$

<u>Démonstration</u> :

D'après la condition (ε) de $(\mathcal{A})$ (Déf. 2) il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout z de V :

$$\mathcal{R}e\ f^{-p}(z)\geqslant \varepsilon+\mathcal{R}e\ z^{-p}$$

et par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases}\mathcal{R}e\left[f^{\circ n}(z)\right]^{-p}\geqslant n\varepsilon+\mathcal{R}e\ z^{-p}\geqslant n\varepsilon+\varepsilon'|z|^{-p}\\ \text{avec}\quad \varepsilon'=\inf\left\{\cos(p\alpha),\ \cos(p\beta)\right\}>0\end{cases}$$

Finalement : $$\left|f^{\circ n}(z)\right|\leqslant\left[n\varepsilon+\varepsilon'|z|^{-p}\right]^{-1/p},\ \forall z\in V$$

ce qui permet aussitôt d'établir (II) et de prouver le lemme 3 en utilisant une évaluation aisée des sommes $$\sum_{n\geqslant 0}\left[n\varepsilon+\varepsilon'|z|^{-p}\right]^{-r/p}$$

<u>Définition 3</u> : Tout élément f de $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$ possédant au point 0 un développement asymptotique (au moins faible), on désignera par $\tilde{f}$ la série formelle de $\tilde{\mathcal{C}}$ qui emprunte ses coefficients au développement asymptotique de f en 0. $\tilde{f}$ est en fait un élément de $\tilde{\mathcal{G}}$, de valuation itérative égale à p, et l'application : $f\to\tilde{f}$ est évidemment un homomorphisme du semi-groupe $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$ dans le groupe $\tilde{\mathcal{G}}$.

Théorème 3 : Soit f un élément de $\mathcal{G}_{\underset{\sim}{p}}(V,p,0)$, soit $\tilde{f}$ l'élément de $\tilde{\mathcal{G}}$ associé à f, soit $(\tilde{f})^*$ l'itérateur de $\tilde{f}$ et soit enfin ρ le résidu itératif de $\tilde{f}$.

Alors, d'après le théorème I, 1, e), $(\tilde{f})^*$ est nécessairement de la forme :

$$(\tilde{f})^*(z) = \rho \log z + \sum_{n \geq -p} c_n z^n \quad (c_{-p} \neq 0,\ c_0 = 0)$$

et si l'on pose :

$$F(z) = \rho \log z + \sum_{n=-p}^{n=-1} c_n z^n$$ (pour $z \in V$ on prend la détermination principale de $\log z$)

on peut énoncer :

a) Il existe une fonction f^* unique, holomorphe sur V et telle que

(12) $\quad f^* \circ f(z) = 1 + f^*(z) \qquad \forall z \in V$

(13) $\quad f^*(z) = F(z) + o(1)$ quand $z \to 0$ dans V

f^* sera dit "itérateur de f ".

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^*(z) = \rho \log z + \sum_{m=-p}^{m=n} c_m z^m + o(z^n)$$

c) Pour toute fonction G, holomorphe sur V et de la forme :

(14) $\quad G(z) = F(z) + o(1)$

on a :

(15) $\quad f^*(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{ G \circ f^{\circ n}(z) - n \right\}$ uniformément sur tout V.

Démonstration du théorème 3 - a, b.

Montrons d'abord que s'il existe f^* vérifiant (12) et (13), elle est unique. C'est immédiat : soit en effet Φ vérifiant:

$$\begin{cases} \text{(12 bis)} & \Phi \circ f(z) = 1 + \Phi(z) \\ \text{(13 bis)} & \Phi(z) = F(z) + o(1) \end{cases}$$

On aura, pour tout $z \in V$ et tout entier $n \geq 0$:

$$(f^* - \Phi)(z) = (f^* - \Phi) \circ f(z) = (f^* - \Phi) \circ f^{\circ n}(z) \quad (16)$$

Or d'après (13) et (13 bis): $(f^* - \Phi)(z) \to 0$ quand $z \to 0$. Par suite, pour tout z fixe de V, le dernier membre de (16) tend vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui montre bien que $f^*(z) \equiv \Phi(z)$.

Montrons maintenant l'existence de f^*.

Pour tout entier $r \geqslant -p$ posons :

$$\begin{cases} (17) \quad F_r(z) = \rho \log z + \sum_{n=-p}^{n=r} c_n z^n \\ (18) \quad A_r(z) = F_r \circ f(z) - F_r(z) - 1 \end{cases}$$

on a donc (19) $\tilde{F}_r(z) = (\tilde{f})^*(z) + \tilde{O}(z^{r+1})$

et aussi (20) $(\tilde{f})^* \circ \tilde{f} - (\tilde{f})^* - 1 = 0$ (Voir Théorème I,1,e).

De (18), (19) et (20) on tire

$$(21) \quad \tilde{A}_r(z) = \tilde{O}\left(\left(\tilde{f}(z)\right)^{r+1}\right) - \tilde{O}\left(z^{r+1}\right) = \tilde{O}\left(z^{r+1}\right)$$

Notons ensuite que si l'on pose :

$$F_{r,n}(z) = F_r \circ f^{\circ n}(z) - n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

on a :

$$F_{r,n}(z) = F_r(z) + \sum_{q=0}^{q=n-1} A_r \circ f^{\circ q}(z) \qquad (n \geqslant 1)$$

Mais (21) implique que $A_r(z) = O(z^{r+1})$ et par suite on peut appliquer le lemme 3 et affirmer :

$$\begin{cases} (22) \quad \lim\limits_{n\to\infty} F_{r,n}(z) = \Phi_r(z) \quad \text{uniformément sur } V \text{ si } r \geqslant p \\ (23) \quad \Phi_r(z) = F_r(z) + O(z^{r+1-p}) \;;\; \Phi_r \in H(V) \end{cases}$$

De plus, en passant à la limite (en n) dans l'identité :

$$F_{r,n} \circ f(z) - F_{r,n+1}(z) - 1 = 0$$

on trouve :

$$(24) \qquad \Phi_r \circ f(z) - \Phi_r(z) - 1 \equiv 0 \text{ sur } V.$$

(23) + (24) + montrent que pour tout $n \geqslant p$, le Φ_n qu'on vient de construire est bien un itérateur f^* de f (et puisque f^* est unique Φ_n ne dépend pas de n).

De plus, dans (23), n peut être choisi arbitrairement grand, et l'assertion du théorème 3-b en découle.

Démonstration du théorème 3-c.

Elle est immédiate. En effet, toute G de la forme (15) est aussi de la forme

$$G(z) = f^*(z) + \varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(z) = o(1)$$

Par suite, uniformément sur tout V :

$$\lim_{n\to\infty}\left[G\circ f^{\circ n}(z) - n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[f^*\circ f^{\circ n}(z) - n\right] + \lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(f^{\circ n}(z)\right) = f^*(z)$$

Théorème 4 :

a) Si $f \in \mathcal{G}_k(V,p,1)$ alors la fonction méromorphe sur V définie par $f_*(z) = \left(\frac{d}{dz} f^*(z)\right)^{-1}$ est en fait holomorphe. On l'appelle "logarithme itératif de f".

Elle est $\neq 0$ et est caractérisée par les relations (25) + (26) :

(25) $$f_*\circ f(z) = f'(z)\, f_*(z) \quad \text{sur } V$$

(26) $$f_*(z) \sim f(z) - z \quad \text{quand } z \to 0 \text{ dans } V.$$

De plus, on a, uniformément sur V

(27) $$f_*(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\circ(n+1)}(z) - f^{\circ n}(z)}{\left(\frac{d}{dz} f^{\circ n}(z)\right)}$$

b) Si $f\in\mathcal{G}_k(V,p,m)$ et si $1 \leqslant m \leqslant \infty$, f_* admet en 0, sur V, un développement asymptotique de force $(m-1)$, et $\left(f^*(z) - \rho \log z\right)$ un développement asymptotique de force m.

Démonstration du théorème 4 - a.

f_* étant l'inverse d'une fonction holomorphe, est $\neq 0$.

De plus (25) + (26) caractérisent bien f_* : soit en effet g_* vérifiant

$$\begin{cases} \text{(25 bis)} & g_* \circ f(z) = f'(z)\, g_*(z) \\ \text{(26 bis)} & g_*(z) \sim f(z) - z \end{cases}$$

De (25) et (25 bis) on tire : (28) $\left(g_*/f_*\right)(z) = \left(g_*/f_*\right) \circ f(z) = \left(g_*/f_*\right) \circ f^{\circ n}$

Mais, d'après (26) et (26 bis) le dernier membre de (28) tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ (à z fixe). Donc : $f_*(z) = g_*(z)$

Montrons ensuite que f_* vérifie effectivement (25) et (26). Pour (25) c'est immédiat. Examinons (26).

Soit F_n et A_n les fonctions auxiliaires introduites ci-avant lors de la démonstration du point a) du théorème 3.

On a vu que pour tout n assez grand :

$$(29) \qquad f^*(z) = F_n(z) + \sum_{q \geq 0} A_n \circ f^{\circ q}(z)$$

Tous les termes de (29) étant holomorphes sur V, et la convergence étant uniforme sur tout compact de V (en fait sur V tout entier), (29) implique :

$$(30) \qquad \frac{d}{dz} f^*(z) = F_n'(z) + \sum_{q \geq 0} \left(\frac{d}{dz} f^{\circ q}(z)\right) A_n' \circ f^{\circ q}(z)$$

uniformément sur tout compact de V.

Mais on a vu que : (31) $A_n(z) = F_n \circ f(z) - F_n(z) - 1 = O(z^{n+1})$

Or F_n' admet en 0 un développement asymptotique faible (puisque c'est une fraction rationnelle) et il en est de même de f et f' (puisque par hypothèse $f \in \mathcal{G}_{h^-}(V, |\cdot|, 1)$). Par suite A_n' admet aussi en 0 un développement asymptotique faible et d'après (31) on a nécessairement : (32) $A_n'(z) = O(z^n)$.

D'autre part, à cause de l'identité $\frac{d}{dz} f^{\circ q}(z) = \prod_{0 \leq s \leq q} f' \circ f^{\circ s}(z)$ et puisque par hypothèse $|f'(z)| < 1$ sur V (voir $(\mathcal{A}_1), (\delta)$) on a aussi :

$$(33) \qquad \left|\frac{d}{dz} f^{\circ q}(z)\right| < 1 \qquad \text{sur } V.$$

De (32) et (33), et par application du lemme 3, il résulte que si $r > p$: ((**) on rappelle que par hyp. $|f'(z)| < 1$)

$$\left|\sum_{q\geq 0} \left(\frac{d}{dz} f^{\circ q}(z)\right) . A'_r \circ f^{\circ q}(z)\right| < C^{ste} \sum_{q\geq 0} \left|f^{\circ q}_{(z)}\right|^r = O(z^{r-p})$$

la relation (26) en résulte. De plus, compte tenu de (30), on a :

$$\text{(34)} \qquad \frac{d}{dz} f^*(z) = f_*^{-1}(z) = F'_r(z) + O(z^{r-p}) \quad \forall r > p$$

Or on tire de (25), en itérant :

$$\text{(35)} \qquad f_*^{-1}(z) = \left(f^{\circ n}(z)\right)' \Big/ \left(f_* \circ f^{\circ n}(z)\right)$$

Si donc f_* était méromorphe et non holomorphe sur V, $f_*^{-1}(z)$ s'annulerait en un certain $z_0 \in V$, et aussi, d'après (35) en tous les points $z_n = f^{\circ n}(z_0)$.

En portant dans (34) on trouve : $F'_r(z_n) + O(|z_n|^{r-p}) = 0$ ($\forall n$; r fixe et $>p$).

Mais c'est absurde, car $z_n \to 0$ et $F'_r(z) = \underline{O}(z^{-p-1})$.

Donc f_* est bien holomorphe, et le théorème 4-a) est démontré, à l'exception de (27), qu'il reste à examiner :

(35) peut aussi s'écrire (pour n assez grand) :

$$f_*(z) = \frac{f_* \circ f^{\circ n}(z)}{g \circ f^{\circ n}(z) - f^{\circ n}(z)} \cdot \frac{f^{\circ n+1}(z) - f^{\circ n}}{\left(\frac{d}{dz} f^{\circ n}(z)\right)}$$

Or d'après (26) (qui vient d'être établie) :

$$\lim_{n\to\infty} f_* \circ f^{\circ n}(z) \Big/ \left(g \circ f^{\circ n}(z) - f^{\circ n}(z)\right) = 1$$

uniformément sur V, et (27) en résulte.

<u>N. B.</u> Le second membre de (27) étant, pour chaque n, une fonction holomorphe sur V, on retrouve le fait que f_* est holomorphe sur V. Toutefois, la relation (34) nous était nécessaire pour établir (26), et surtout en vue de la démonstration du point b).

Démonstration du théorème 4- b).

De la relation (34), valable pour $n > p$ *, on tire l'existence d'un développement asymptotique faible (de force* 0 *) pour* f_* *, et celle d'un développement asymptotique de force 1 pour* $\{f^*(z) - p \log z\}$*, ce qui démontre le point b) pour* $m = 1$ *. Raisonnons par récurrence et supposons maintenant que pour un certain* $m_0 \geqslant 1$ *le point b) soit vrai (ce qui entraîne qu'il l'est aussi pour tout* $m \leqslant m_0$*).*

En application de la formule (35) on peut écrire :

$$\frac{d}{dz}\left(A_n \circ f^{\circ q}(z)\right) = \left(\left(f_* A_n'\right)\circ f^{\circ q}(z)\right) / f_*(z)$$

; et de même :

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(A_n \circ f^{\circ q}(z)\right) = f_*^{-1}(z)\left(f_*^2 A_n''\right)\circ f^{\circ q}(z) + f_*^{-1}(z)\left(f_* f_*' A_n'\right)\circ f^{\circ q}(z) - f_*'(z)\, f_*^{-2}(z)\left(f_* A_n'\right)\circ f^{\circ q}(z)$$

Et plus généralement, par application répétée de la formule (35) on voit que $\frac{d^m}{dz^m}\left(A_n \circ f^{\circ q}(z)\right)$ *est une somme finie de termes de la forme* $Q(z)\left(P A_n^{(m')}\right)\circ f^{\circ q}(z)$ *où* $1 \leqslant m' \leqslant m$ *et où les* P *(resp. les* Q *) sont des polynômes (resp. fractions rationnelles) des arguments* $f_*(z), f_*'(z), \dots, f_*^{(m-1)}(z)$ *.*

Par suite de l'hypothèse de récurrence concernant l'existence d'un développement asymptotique de f_* *de force* $(m_0 - 1)$ *, il est clair que chacune des fonctions* $Q(z)$ *et* $\left(P(z)\, A_n^{(m')}(z)\right)$ *intervenant dans l'expression de*

$$\frac{d^{m_0+1}}{dz^{m_0+1}}\left(A_n \circ f^{\circ q}(z)\right)$$

admet un développement asymptotique faible (au moins) en 0 *, et puisque* $A_n(z) = O(z^{n+1})$*, pour tout entier donné* n' *on peut choisir* n $(=$ *entier fonction de* n' *et de* $(m_0+1))$ *assez grand pour que chacun des termes* $\left(P(z)\, A_n^{(m')}(z)\right)$ *soit un* $O(z^{n'})$ *. Par suite, en différenciant* $(m_0 + 1)$ *fois la relation (29) et en appliquant une fois de plus le lemme 3 on trouve :*

$$\frac{d^{m_0+1}}{dz^{m_0+1}} f^*(z) = F_r^{(m_0+1)}(z) + \left\{ \begin{array}{l} \text{une somme finie de termes} \\ \text{du type } Q(z)\, \mathcal{O}(z^{r'-p}) \end{array} \right.$$

Mais puisque chaque $Q(z)$ *est un* $\mathcal{O}(|z|^{r_Q})(r_Q \in \mathbb{Z})$, *pour tout* r'' *donné à l'avance, on peut choisir* r' *, puis* r *, assez grands pour que :*

$$\frac{d^{m_0+1}}{dz^{m_0+1}} f^*(z) = F_r^{(m_0+1)}(z) + \mathcal{O}(z^{r''})$$

ce qui achève le raisonnement par récurrence et prouve le point b) en ce qui concerne $(f^*(z) - \rho \log z)$.

Or l'énoncé correspondant relatif à $f_*(z)$ *en résulte aussitôt, et ceci achève la démonstration du théorème 4.*

Pour obtenir des résultats plus riches, et en particulier pour construire une itération "fractionnaire" (ou complexe générale) dans $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$ *il va nous falloir postuler l'univalence de* f *, univalence que - on le notera bien - les hypothèses précédentes n'assurent pas.*

<u>Définition 5</u>. On désigne par $\mathcal{G}_{hu-}(V,p,m)$ *(pour* $1 < p < \infty ; 0 \leq m \leq \infty$ *) le sous-ensemble de* $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$ *formé des* f *qui sont univalentes sur* V *, c'est-à-dire telles que* $\{z_1 \neq z_2\} \Rightarrow \{f(z_1) \neq f(z_2)\}$
Il est immédiat que $\mathcal{G}_{hu-}(V,p,m)$ *est un sous-semi-groupe du semi-groupe* $\mathcal{G}_{h-}(V,p,m)$
Nous pouvons alors énoncer :

<u>Théorème 5: (Itération générale sectorielle)</u>

Soit f *un élément de* $\mathcal{G}_{hu-}(V,p,m)$ *(donc :* f *univalente sur* V *).*
Alors :

a) l'Itérateur f^* *de* f *est univalent sur* V.
On note ${}^*f$ *l'application holomorphe de* $f^*(V)$ *sur* V *telle que* ${}^*f \circ f^*(z) \equiv z$.
b) Pour tout $w \in \mathbb{C}$ *la relation*

$$(36) \qquad f^{\circ w}(z) = {}^*f\left[w + f^*(z) \right]$$

définit "à la racine du rayon 0 *"* [*c'est-à-dire sur un certain secteur* $V_w = V(\alpha_w, \beta_w ; h_w)$ *avec* $\alpha_w < 0 < \beta_w$: *voir à ce sujet la définition 2-d*] *une fonction holomorphe* $f^{\circ w}$ *de* z, *appelée "itérée (généralisée) d'ordre* w *de* f *".* $f^{\circ w}(z)$ *est univalente* (*en* z, *et à la racine du rayon* 0).

De plus, les relations suivantes sont vérifiées identiquement "à la racine du rayon 0 *".*

(37) $$f^{\circ 1}(z) = f(z)$$

(38) $$f^{\circ u} \circ f^{\circ v}(z) = f^{\circ(u+v)}(z) \qquad \forall u,v \in \mathbb{C}$$

(38 bis) $$f^{\circ w} \circ f(z) = f \circ f^{\circ w}(z)$$

(39) $$f^{\circ w}(z) - z \sim w\,(f(z) - z) \qquad (w \text{ fixe} ;\ z \to 0)$$

(40) $$\frac{\partial}{\partial w} f^{\circ w}(z) = f_*(z)\,\frac{\partial}{\partial z} f^{\circ w}(z) = f_* \circ f^{\circ w}(z)$$

(40 bis) $$\left(\frac{\partial}{\partial w} f^{\circ w}(z)\right)_{w=0} = f_*(z)$$

(40 ter) $$\int_z^{f^{\circ w}(z)} \frac{d\zeta}{f_*(\zeta)} = w$$

c) $\forall w \in \mathbb{C}$, *la fonction* (*de* z) $f^{\circ w}(z)$ *admet en* 0, *"à la racine du rayon* 0 *", un développement asymptotique* $\widehat{(f^{\circ w})}$ *de force* m *et l'on a :*

$$\widehat{(f^{\circ w})} = (\hat{f})^{\circ w}$$

d) Les relations (38 bis) + (39) du point b) <u>*caractérisent*</u> $f^{\circ w}$.

[<u>*Mais attention*</u>!! *il s'agit des relations (38 bis) + (39) "à la racine du rayon* 0 *". Sinon, le résultat est faux.*

Par exemple, sur un secteur $V(\alpha', \beta' ; h')$ *avec* $0 < \alpha' < \beta' \leq \beta$ *ou* $\alpha \leq \alpha' < \beta < 0$ *il peut y avoir une infinité de* φ *holomorphes vérifiant* $\varphi \circ f = f \circ \varphi$ *et* $\varphi(z) - z \sim w(f(z) - z)$, *et même admettant en* 0 *des développements asymptotiques de force* m, *et toutefois distinctes de* $f^{\circ w}$. *Ce fait est capital pour la suite de la théorie* .]

Démonstration du théorème 5-a.

On a vu lors de la démonstration du théorème 3.a) que

(41) : $f^*(z) = \lim_{n\to\infty} F_{r,n}(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{F_r \circ f^{\circ n}(z) - n\right\}$ si $r \geqslant p$ uniformément sur tout compact de V.

Mais $F_r(z) = \rho \log z + \sum_{n=-p}^{n=r} c_n z^n$ et par suite il existe un secteur $V_r = V(\alpha,\beta,h_r) \subset V = V(\alpha,\beta,h)$ tel que sur V_r la fonction $F_r(z)$ soit univalente(**), et par suite aussi les fonctions $F_r \circ f^{\circ n}(z)$ et

$$F_{r,n}(z) = F_r \circ f^{\circ n}(z) - n.$$

Or une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes univalentes est soit univalente, soit constante. (Cela tient à ce qu'une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes $\neq 0$ est soit $\neq 0$ soit $= 0$)

Donc, eu égard à (41), f^* est univalente sur V_r.

Si donc il existait deux points distincts z_1 et z_2 de V tels que $f^*(z_1) = f^*(z_2)$, on pourrait choisir un entier k assez grand pour que $f^{\circ k}(z_1)$ et $f^{\circ k}(z_2)$ soient dans V_r et d'après l'équation fonctionnelle de l'itérateur nous aurions :

$$f^*(z_1) = f^* \circ f^{\circ k}(z_1) - k = f^*(z_2) = f^* \circ f^{\circ k}(z_2) - k.$$

Moyennant l'univalence de f^* sur V_r, cela impliquerait : $f^{\circ k}(z_1) = f^{\circ k}(z_2)$, en contradiction avec l'univalence de l'élément $f^{\circ k}$ de $\mathcal{G}_{hu-}(V,p,m)$

Donc, f^* est univalent sur V, et l'on peut définir une application réciproque : $z \to {}^*f(z)$, qui sera holomorphe univalente sur $f^*(V)$.

Démonstration du théorème 5- b, c, d).

Les démonstrations sont une affaires de simples vérifications, à partir de la définition (36) de $f^{\circ w}$, et des propriétés de f^* énumérées aux théorèmes 3 et 4.

(**) et tel que $f(V_r) \subset V_r$

Enonçons pour clore ce paragraphe un théorème reliant (directement) f, $f^{\circ w}$ *et* f_* *deux à deux.*

Théorème 6 :

a) Soit $f \in \mathcal{G}_{hu-}(V,p,m)$ *et* $\Phi \in H(V)$ *(i.e.* Φ *holomorphe sur* V *)*

Alors, pour tout compact K *de* V *il existe* $u>0$ *tel que sur l'ensemble* $\{(z,w)\ ;\ z\in K\ ,\ |w|\leq u\}$ *on ait uniformément*

$$(\alpha)\quad \Phi\circ f^{\circ w}(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} w^n/n!\ \left(f_*(z)\frac{d}{dz}\right)^n \Phi(z)$$

b) Soit $f \in \mathcal{G}_{hu-}(V,1,m)$ *(donc valit* $\tilde{f}=1$ *) et supposons en outre qu'il existe un disque* $D_r = \{z\ ;\ |z-r|<r\}$ *tel que*

**)* f *admet un prolongement analytique univalent sur* D_r.

***)* f *est de la forme* $z-az^2+o(z^2)$ *non seulement sur* V *(comme l'implique l'hypothèse) mais aussi sur* D_r *tout entier.*

****)* $f(D_r)\subset D_r$ *et* $\forall z_0\in D_r\ ,\ f^{\circ n}(D_r)\to 0$ quand $n\to\infty$.

Alors, $\forall w\in\mathbb{C}$ *et* $\forall\Phi\in H^1(D_r)$ *(i.e.* Φ *holomorphe et intégrable*(**) *sur* D_r*) les relations suivantes sont uniformément vérifiées quand* z *parcourt un compact donné* K, *de* D_r

$$\begin{cases} (\beta)\quad \Phi\left(f^{\circ w}(z)\right) = \Phi(z) + \displaystyle\sum_{n\geq 1} C_w^n\ U_n(\Phi,f,z) \\ (\gamma)\quad f_*(z)\,\Phi'(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}/n\ \ U_n(\Phi,f,z) \\ \text{avec}\quad U_n(\Phi,f,z) = \displaystyle\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k\, C_n^k\ \Phi\circ f^{\circ(n-k)}(z) \end{cases}$$

Inversement, pour tout z *fixé dans* V, *il existe* $r(z)>0$ *et tel que* (β) *et* (γ) *soient vérifiées uniformément pour tout* w *du disque* $|w|<r(z)$.

Démonstrations :

Le point a) est très facile à établir à partir de la relation (36) du

---

(**) en module

théorème 5, qui permet de discuter les domaines d'holomorphie en (z, w) *de* $f^{\circ w}(z)$, *et de la relation (40) du même théorème 5, qui implique :*

$$\frac{\partial^n}{\partial w^n}\left(\Phi \circ f^{\circ w}(z)\right) = \left(f_*(z)\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left(\Phi \circ f^{\circ w}(z)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La relation (γ) *du point b) résulte de la relation* (β) *compte tenu de :*

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\Phi \circ f^{\circ w}\right)\right]_{w=0} = f_* \Phi' \\[2ex] \left[\dfrac{\partial}{\partial w} C_w^n\right]_{w=0} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \end{cases}$$

Reste la relation (β) *elle-même. Celle-ci n'étant pas absolument essentielle pour la suite, nous nous contenterons d'indiquer le principe de sa démonstration.*

On démontre la relation (β) *successivement dans les cas suivants :*

<u>(i)</u> $f(z) = z/1+z \quad ; \quad \Phi(z) = (c-z)^{-1} \quad c \in \mathbb{C}, c \neq 0$

<u>(ii)</u> $f(z) = z/1+z \quad ; \quad \Phi \in H^1(D_1)$

<u>(iii)</u> $f \in \mathcal{G}_{hu-}(V, 1, m) \quad ; \quad \Phi \in H^1(D_1)$

Voici grosso modo comment on procède à chacune de ces trois étapes.

<u>(i)</u> *On vérifie élémentairement que* $f^{\circ w}(z) = z/1+wz$

et que

$$U_n\left((c-z)^{-1}, z(1-z)^{-1}, z\right) = -\left(c^2 (n+1) C_y^{n+1}\right)^{-1} \text{ avec } y = c^{-1} - z^{-1}$$

La relation (β) *s'écrit alors :*

$$(42) \quad \left(c - \frac{z}{1+wz}\right)^{-1} = (c-z)^{-1} - c^{-2}\sum_{n \geq 1} C_w^n / (n+1) C_y^{n+1} \text{ avec } y = c^{-1} - z^{-1}$$

Or à z *fixe on a* $|C_z^n| \sim |\Gamma(z)|\, n^{-1-\mathrm{Re}\, z}$ quand $n \to +\infty$ *ce qui permet de discuter le domaine de convergence absolue du second membre de (42). Enfin, pour établir la validité de (42) on peut par exemple utiliser la relation suivante, classique en théorie des fonctions hypergéométriques*

$$\frac{1}{v-w} = \frac{1}{v} + \sum_{n\geq 1} \frac{w(w-1)\dots(w-n+1)}{v(v-1)\dots(v-n)} \quad \text{si } \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} w$$

et où le second membre converge normalement sur tout compact du domaine

$$\{\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} w\} \quad \text{de } \mathbb{C}_v \times \mathbb{C}_w .$$

(ii) En multipliant les deux membres de (42) par $(2\pi i)^{-1}\,\Phi(c)$ *on trouve :*

$$(42\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi(c)}{2\pi i\,[c - f^{\circ w}(z)]} = \dfrac{1}{2\pi i (c-z)} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} C_w^n\, U_n\big((c-z)^{-1}, f, z\big)\, \dfrac{\Phi(c)}{2\pi i} \\ \text{avec } f(z) = z/1+z \ ; \ f^{\circ w}(z) = z/1+wz \end{cases}$$

En intégrant (42 bis) formellement, terme à terme, par rapport à c, le long d'un contour $\partial D_{r'}(r'<r)$ *bien choisi et en tenant compte de la linéarité en* Ψ *de* $U_n(\Psi, f, z)$ *, on trouve, pour le terme de droite et de gauche de (42 bis) :*

$$(42\ ter)\quad \Phi\circ f^{\circ w}(z) \quad \text{et} \quad \Phi(z) + \sum_{n\geq 1} C_w^n\, U_n(\Phi, f, z)\,(z\in D_{r'})$$

Mais comme, ainsi qu'on le vérifie aisément, lorsque c *varie sur un tel contour* $\partial D_{r'}$ *, la série du second membre de (42), et donc aussi la série du second membre de (42 bis), converge normalement (par rapport à* c *), l'intégration terme à terme de (42 bis) par rapport à c est bien légitime, et cela montre l'égalité des deux termes de la ligne (42 ter) (et la convergence du second).*

(iii) Il s'agit de prouver

$$(43)\quad \begin{cases} \Phi\circ f^{\circ w}(z) = \Phi(z) + \displaystyle\sum_{n\geq 1} C_w^n\, U_n(\Phi, f, z) \\ \text{pour un } f \text{ quelconque satisfaisant aux hypothèses du Th. 6, b)} \\ \text{(et pour des } (w,z) \text{ convenables).} \end{cases}$$

*Utilisant les hypothèses *) **) ***) du théorème 6, b) et tirant parti de la relation fonctionnelle :* $f^{*}\circ f^{\circ n}(z) - n = f^{*}(z)$

de l'itérateur f^* de f, on commence par montrer que f^* se prolonge en une fonction holomorphe univalente sur D_r tout entier, et que f^* (ou $f^* - \rho \log z$) admet en 0 un développement asymptotique non seulement relativement à V, mais aussi relativement à D_r.

On introduit ensuite les fonctions

$$g(z) = z/1+z \qquad \text{et} \qquad g^{\circ w}(z) = z/1+wz$$

(c'est-à-dire f et $f^{\circ w}$ de (ii))

et l'itérateur g^* de g, ainsi que $^*g$ $\left(g^*(z) = z^{-1} \; ; \; ^*g(z) = z^{-1} \right)$

Mais puisque :

$$f^{\circ w}(z) = {}^*f\left[w + f^*(z)\right] \qquad \text{et} \qquad g^{\circ w}(z) = {}^*g\left[w + g^*(z)\right]$$

on peut montrer qu'en posant

$$h = {}^*f \circ g^* \qquad \text{et} \qquad k = {}^*g \circ f^*$$

on aura :

$$\begin{cases} h \circ k(z) \equiv z \quad ; \; h \text{ et } k \text{ holomorphes sur } D_r \\ h(z) = \underline{O}(z) \text{ et } k(z) = \underline{O}(z) \text{ quand } z \to 0 \text{ dans } D_r \\ f \circ h = k \circ g \; ; \; f^{\circ n} \circ h = k \circ g^{\circ n} \; ; \; f^{\circ w} \circ h = k \circ g^{\circ w} \; (n \in \mathbb{N} ; w \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

Il en résulte qu'en substituant $h(z)$ à z dans (43) on trouve :

(43)$\Leftrightarrow$(43 bis) avec :

$$\text{(43 bis)} \begin{cases} \Psi \circ g^{\circ w}(z) = \Psi(z) + \sum_{n \geq 1} C_w^n \, U_n(\Psi, g, z) \\ \underline{\text{où}} : \\ \Psi = \Phi \circ k \in H^1(D_r) \; ; \; g(z) = z/1+z \; ; \; g^{\circ w}(z) = z/1+wz \end{cases}$$

Mais (43 bis) est identique, aux notations près, à la relation (42 ter) qui a été établie lors de l'étape (ii), et ceci achève de prouver (β) dans le cas le plus général.

§ 3 : LA THEORIE ITERATIVE DANS LE GROUPE $\mathcal{G}_k$. LES ELEMENTS ITERATIFS SECTORIELS.

On a vu au § 1 du présent chapitre que toute f de $\mathcal{H}_k$ de valuation itérative nulle était pleinement itérable. Cela tient essentiellement au fait que pour une telle f, $a = f'(0) \neq 1$ (et $a > 0$) et que si $a > 1$ (resp. $a \in]0\,1[$) la suite $\varphi_n(z) = a^n f^{\circ(-n)}(z)$ (resp. $\varphi_n(z) = a^{-n} f^{\circ n}(z)$) tend normalement, au voisinage de 0, vers un élément de $\mathcal{G}_k$, noté f^{**} (preit f) et tel que $f^{**} \circ f(z) = a f^{**}(z)$. Ceci donne la possibilité de définir d'une manière naturelle, pour tout w complexe, l'itérée $w^{\text{ième}}$ de f par :

$$f^{\circ w}(z) = {}^{**}f\left(a^w f^{**}(z)\right) \quad \text{avec} \quad {}^{**}f = \left(f^{**}\right)^{\circ(-1)}$$

($f^{\circ w}$ n'est élément de $\mathcal{H}_k$ que si w est réel). La théorie itéritive pour de telles f ne présente donc aucune difficulté (et peu d'intérêt).

Il en va tout autrement du sous-groupe $\mathcal{G}_k$ de $\mathcal{H}_k$, (valit $f \geq 1$ si $f \in \mathcal{G}_k$) auquel est consacré le présent paragraphe (et le suivant). Les éléments f de $\mathcal{G}_k$ <u>ne sont pas, en général, pleinement itérables</u>. Nous montrerons toutefois que si valit $f = p$, il existe $2p$ "domaines" fondamentaux, rayonnant autour de l'origine, notés $\mathcal{U}_\gamma(f)$ (dits "feuilles de f") sur lesquels on peut définir d'une manière naturelle les éléments itératifs habituels : logarithme itératif, itérateur, itérées générales. Le fait fondamental sera l'existence, sur chaque "domaine" (jamais vide) $\mathcal{U}_\gamma(f) \cap \mathcal{U}_{\gamma+1}(f)$, d'une <u>double série</u> d'éléments itératifs. Par des combinaisons appropriées des éléments itératifs de ces deux séries (γ) et $(\gamma+1)$, nous obtiendrons l'important théorème 11 du § 4 (sur le caractère <u>réel</u> et discret du sous-groupe additif W_f des ordres d'itérations admissibles d'un $f \in \mathcal{G}_k - I\mathcal{G}_k$) et surtout, dans la partie B, nous pourrons construire des systèmes complets d'invariants "géométriques" de $\mathcal{G}_k$, les invariants dits "holomorphes", dont l'obtention est un des objectifs et une des justifications principales de la théorie itérative.

Définition 6 : (Rayons fondamentaux et feuilles fondamentales).

Soit f un élément de $\mathcal{G}_{\delta_k}$ tel que valit $f = p < \infty$.

a) f est de la forme $f(z) = z + a z^{p+1} + o(z^{p+1})$ et on désigne par $\theta_0(f) = \theta_0$ le nombre unique de $\left]-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right]$, tel que

$$a = r_0^p \, e^{-ip\theta_0} \quad (r_0 > 0)$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on pose : $\theta_j(f) = \theta_0(f) + j\frac{\pi}{p}$

Les $\theta_j(f)$ seront dits "rayons fondamentaux de f"

(Leur importance tient à ce que si $\lim\limits_{n \to \pm\infty} f^{\circ n}(z_0) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \operatorname{Arg} f^{\circ n}(z_0) = \theta_j(f)$ pour un certain j).

b) Soit $\Delta(f)$ le plus grand disque $\{|z| < R\}$ sur lequel f et $f^{\circ(-1)}$ soient holomorphes. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ (ou $\in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$) on désigne par $\mathcal{U}_j(f)$ l'intérieur de l'ensemble :

$$\left\{z;\ f^{\circ n}(z) \in \Delta(f)\ \forall n \in (-1)^{j+1}\mathbb{N} \text{ et } \operatorname{Arg} f^{\circ n}(z) \to \theta_j(f) \bmod 2\pi \text{ quand } n \to (-1)^{j+1}\infty\right\}$$

$\mathcal{U}_j(f)$ est dit "feuille d'indice j de f".

Nous sommes maintenant en mesure de construire les éléments itératifs sectoriels. Les démonstrations des théorèmes 7, 8, 9 et 10 qui suivent sont rejetées en fin de paragraphe.

On rappelle qu'une propriété est dite vérifiée "à la racine du rayon θ" si elle est vérifiée sur un certain secteur $V(\alpha, \beta; \lambda)$ avec

$$\alpha < \theta < \beta \quad \text{et} \quad \lambda > 0.$$

Lemme 4 : Soit $f \in \mathcal{G}_{\delta_k}$ (valit $f = p < \infty$). Alors, pour tout α de $\left]0, \frac{\pi}{p}\right[$, il existe $\lambda(\alpha) > 0$ tel que

$$V(\theta_{j-1}(f) + \alpha,\ \theta_{j+1}(f) - \alpha;\ \lambda(\alpha)) \subset \mathcal{U}_j(f) \quad \forall j \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$$

Il en résulte en particulier que l'intersection $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_{j+1}(f)$ de deux feuilles consécutives n'est jamais vide.

Démonstration : Puisque $f(z)$ est de la forme $z + az^{p+1} + o(z^{p+1})$ $(a = r_0^p e^{-ip\theta_0})$ on a aussi : $f^{\circ(-1)}(z) = z - az^{p+1} + o(z^{p+1})$

Par suite, pour $\varepsilon = \pm 1$:

(44) $$w_\varepsilon(z) = \varepsilon a^{-1} z^{-p} - \varepsilon a^{-1}\left[f^{\circ\varepsilon}(z)\right]^{-p} = p + O(z)$$

Fixons-nous maintenant un $\beta \in]0, \pi/2[$.

On peut choisir un disque $\Delta_\rho = \{|z| < \rho\}$ tel que :

(i) f et $f^{\circ(-1)}$ sont holomorphes sur Δ_ρ et n'y admettent pas d'autres points fixes ni d'autres zéros que 0.

(ii) $|w_\varepsilon(z) - p| \leqslant p \sin\beta \quad \forall z \in \Delta_\rho$, et par suite :

(iii) $|\mathrm{Arg}\, w_\varepsilon(z)| \leqslant \beta \quad \forall z \in \Delta_\rho$

(iiii) $|\mathrm{Re}\, w_\varepsilon(z)| \geqslant p(1 - \sin\beta) > 0 \quad \forall z \in \Delta_\rho$

Pour $\varepsilon = \pm 1$, $\beta \in]0, \pi/2[$ et $r > 0$ désignons maintenant par $\mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r)$ l'ouvert borné formé des z non-nuls tels que

(44 bis) $$\left|\mathrm{Arg}\left(-r^{-p} - \varepsilon a^{-1} z^{-p}\right)\right| < \pi - \beta$$

On peut choisir $r = r(\beta)$ assez petit pour que $\mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r) \subset \Delta_\rho \quad (\varepsilon = \pm 1)$

Mais de (iii) et (44 bis) on tire :

$$\left|\mathrm{Arg}\left\{(-r^{-p} - \varepsilon a^{-1} z^{-p}) + w_\varepsilon(z)\right\}\right| = \left|\mathrm{Arg}\left\{-r^{-p} - \varepsilon a^{-1}\left[f^{\circ\varepsilon}(z)\right]^{-p}\right\}\right| < \pi - \beta$$

et par suite : $f^{\circ\varepsilon}\{\mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r(\beta))\} \subset \mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r(\beta))$

Donc, si $z \in \mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r(\beta))$ on a :

(45) $$f^{\circ\varepsilon}(z);\ f^{\circ\varepsilon 2}(z); \ldots; f^{\circ\varepsilon n}(z) \in \mathcal{D}(\varepsilon, \beta, r(\beta)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(46) $$w_\varepsilon(z) + w_\varepsilon(f^{\circ\varepsilon}(z)) + \ldots + w_\varepsilon(f^{\circ\varepsilon(n-1)}(z)) = \varepsilon a^{-1} z^{-p} - \varepsilon a^{-1}\left[f^{\circ\varepsilon n}(z)\right]^{-p}$$

(45), (46) et (iiii) impliquent :

(47) $$\left|\mathrm{Re}\left[f^{\circ\varepsilon n}(z)\right]^{-p}\right| \geqslant \left|np(1 - \sin\beta) - |\mathrm{Re}(z^{-p})|\right|$$

De (47) il résulte que pour tout z *de* $\mathcal{D}(\varepsilon,\beta,r(\beta))$, $f^{\circ\varepsilon n}(z)\to 0$ *quand* $n\to+\infty$. *Mais par suite :* $w_\varepsilon(f^{\circ\varepsilon n}(z))\longrightarrow p$ *, et en se reportant une seconde fois à (46), on voit que*

$$\varepsilon a^{-1}z^{-p}-\varepsilon a^{-1}\left[f^{\circ\varepsilon n}(z)\right]^{-p}\sim np \text{ quand } n\to\infty \text{ soit encore (48) } \left[f^{\circ\varepsilon n}(z)\right]^{p}\sim-\frac{\varepsilon}{npa}$$

Mais on vérifie facilement d'après la définition de $\mathcal{D}(\varepsilon,\beta,r)$

*) *que* $\mathcal{D}(-1,\beta,r)=e^{-\pi/p\,i}\,\mathcal{D}(1,\beta,r)$

*) *que* $\mathcal{D}(1,\beta,r)$ *est la réunion de p composantes connexes* $\mathcal{D}_j(1,\beta,r)$ $(j\in\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z};\ j\equiv 1 \bmod 2)$. *Elles sont telles que* $\mathcal{D}_j(1,\beta,r)$ *est symétrique par rapport au rayon* θ_j *et limité en* 0 *par deux demi-arcs tangents respectivement aux rayons* $\theta_{j-1}+(\beta/p)$ *et* $\theta_{j+1}-(\beta/p)$ *, et que par suite,* $\forall\,\alpha>(\beta/p)>0$ *, il existe* r' *tel que*

$$V(\theta_{j-1}+\alpha,\ \theta_{j+1}-\alpha,\ r')\subset\mathcal{D}_j(1,\beta,r(\beta))$$

On désigne de même par $\mathcal{D}_j(-1,\beta,r(\beta))$ $(j\in\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z},\ j\equiv 0 \bmod 2)$ *la partie connexe de* $\mathcal{D}_j(-1,\beta,r(\beta))$ *symétrique par rapport au rayon* θ_j .

De tout ceci, et compte tenu de (48), il résulte que pour tout $j\in\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ *et tout* z *de* $\mathcal{D}_j((-1)^{j+1}\beta,r(\beta))$:

$$\lim_{n\to(-1)^{j+1}}\operatorname{Arg} f^{\circ n}(z)=\theta_j \pmod{2\pi}$$

Il résulte de tout ce qui précède que

$$\mathcal{D}_j((-1)^{j+1},\beta,r(\beta))\subset\mathcal{U}_j\qquad\forall_j\in\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$$

et le lemme 4 en résulte, compte tenu de la forme des $\mathcal{D}_j((-1)^{j+1},\beta,r(\beta))$ *qui vient d'être précisée.*

Théorème 7 : (Les éléments sectoriels f_{*j} *,* f^{*j} *et* $f^{\circ_j w}$*)*

Soit f *un élément de* $\mathcal{G}_k$ *, soient* $\theta_j=\theta_j(f)$ *ses* $2p$ *rayons fondamentaux, soient* $\mathcal{U}_j=\mathcal{U}_j(f)$ *ses* $2p$ *feuilles. (On pose comme d'habitude : valit* $f=p$ *et résit* $f=\rho$ *).*

a) $\forall j \in \mathbb{Z}$, il existe une seule fonction φ, définie et holomorphe "à la racine du rayon θ_j" et vérifiant ("à la racine du rayon θ_j") le système (α) (resp. le système (β) ; (γ)).

$$(\alpha) \begin{cases} \varphi \circ f(z) = \varphi(z)\, f'(z) \\ \varphi(z) \sim f(z) - z \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} \varphi \circ f(z) = 1 + \varphi(z) \\ \varphi(z) = \rho \log z + F(z) + o(1) \text{ , où } F(z) \text{ est une fraction} \\ \text{rationnelle du type } \sum\limits_{-p \leq n \leq -1} C_n z^n \text{ et où } \log_j z = i\,\theta_j + \log(z e^{-i\theta_j}) \\ (\log z : \text{ détermination principale}) \end{cases}$$

$$(\gamma) \begin{cases} \varphi \circ f(z) = f \circ \varphi(z) \qquad (w \text{ complexe donné}). \\ \varphi(z) - z \sim w\,(f(z) - z) \end{cases}$$

L'unique solution φ de (respectivement) (α), (β) et (γ) sera notée :

$$f_{*j} \quad , \quad f^{*j} \quad , \quad f^{\circ_j w}$$ et appelée :

- f_{*j} : logarithme itératif sectoriel d'indice j de f (en abrégé : $\text{logit}_j f$)
- f^{*j} : itérateur sectoriel d'indice j de f.
- $f^{\circ_j w}$: itérée (généralisée) d'ordre w et d'indice j de f.

b) f_{*j} et f^{*j} admettent chacune un prolongement analytique sur la feuille $\mathcal{U}_j$ toute entière. Aussi petit que soit α $(\alpha > 0)$ $f^{\circ_j w}$ admet un prolongement analytique sur un certain secteur

$$V(\theta_{j-1} + \alpha, \theta_{j+1} - \alpha ; \lambda(w,\alpha))$$

(pour un certain $\lambda(w,\alpha) > 0$) mais pas toujours sur la feuille $\mathcal{U}_j$ toute entière.

De plus, sur ces domaines élargis de définition

$f_{*j}(z)$, $f^{*j}(z) - \rho_j \log z$ et $f^{\circ j w}(z)$ admettent en 0 des développements asymptotiques forts (Voir III, § 2, déf. 2) et qui coïncident avec les éléments itératifs correspondants relatifs à l'élément $\tilde{f}$ de $\tilde{G}$ associé à f , à savoir :

$$(\tilde{f})_* \quad ; \quad (\tilde{f})^* - \rho \log z \quad ; \quad (\tilde{f})^{\circ w}$$

c) f_{*j} est $\neq 0$ sur U_j et f^{*j} est univalente sur U_j .

f^{*j} réalise donc une bijection holomorphe du domaine U_j sur le domaine $U^j = f^{*j}(U_j)$. La bijection réciproque de U^j sur U_j sera notée ${}^{j*}f$.

Il existe $y_j > 0$ et $< +\infty$ tel que les 2 demi-plans $|\Im m\, z| > y_j$ soient contenus dans U^j . Si $\rho = 0$, on peut choisir y_j indépendant de j .

<u>Démonstration</u> : voir en fin de paragraphe.

<u>Remarque</u> : Bien entendu, lorsque f est pleinement itérable, chacun des éléments sectoriels f_{*j} , f^{*j} , $f^{\circ j w}$ coïncide, sur son domaine de définition, avec la restriction de l'élément global correspondant.

On va montrer ce fait capital pour la suite : le système (α) (resp. (β) (γ)) caractérise l'élément sectoriel correspondant <u>uniquement</u> si on lui impose d'être vérifié <u>à la racine d'un rayon fondamental</u> θ_j .

<u>Théorème 8</u> : Les hypothèses et notations étant celles du théorème 7, on peut énoncer :

a) sur tout secteur V ne contenant aucun des $(2p)$ rayons fondamentaux θ_j chacun des systèmes (α), (β) , (γ) du théorème 7-a) admet une infinité de solutions φ , même si on impose à φ de posséder en 0 (sur V) un développement asymptotique faible, ou même fort.

b) sur l'ensemble $U_j \cap U_{j+1} (\neq \emptyset)$ nous avons (notamment) comme solutions :

(i) <u>du système</u> (α) : $\quad \mu f_{*j} + (1-\mu) f_{*j+1} \; , \forall \mu \in \mathbb{C}$

(ii) du système (β) : $\quad p\, f^{*j} + (1-p)\, f^{*j+1}$

De plus, à la racine de tout rayon θ *distinct des* $(2p)$ *rayons fondamentaux, nous avons des solutions encore plus nombreuses, à savoir (entre autres) celle qu'on obtient à partir des solutions (i) et (ii) en substituant* $\varpi(z)$ *à* z *, où* $\varpi(z)$ *est une fonction quelconque du type :*

$$\varpi(z) = f^{o_j u_1} \circ f^{o_{j+1} v_1} \circ f^{o_j u_2} \circ f^{o_{j+1} v_2} \circ \dots f^{o_j u_r} \circ f^{o_{j+1} v_r}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} u_1 + \dots + u_r + v_1 + \dots + v_r = 0 \\ r \text{ entier quelconque, et où } j \text{ est l'unique entier de } \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} \\ \qquad \text{tel que la racine du rayon } \theta \text{ soit dans } \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1} \end{array} \right.$

Chacune des solutions de (α), (β) *ou* (γ) *énumérées ci-dessus possède, au point* 0 *(sur son domaine de définition, c'est-à-dire soit* $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}$ *, soit à la racine du rayon* θ *) un développement asymptotique fort, qui est identique pour chacune (c'est-à-dire, qui ne dépend que du système* (α) *,* (β) *ou* (γ) *dont elle est solution).*

Théorème 9 : (Relations entre les éléments sectoriels)

Les hypothèses et les notations étant toujours celles du théorème 7, nous pouvons donner la liste des principales relations liant les différents éléments sectoriels (sans qu'il soit besoin de préciser les domaines de validité dans chaque cas). Ce sont d'ailleurs les relations auxquelles nous sommes déjà habitués : on notera toutefois la non commutabilité de

$f^{o_j u}$ et $f^{o_{j+1} v}$

a) $\quad f^{o_j 1} = f \ ; \quad f^{o_j u} \circ f^{o_j v} = f^{o_j (u+v)}$

$f^{o_j w}$ *commute avec* f *, mais en général :* $f^{o_j u} \circ f^{o_{j+1} v} \neq f^{o_{j+1} v} \circ f^{o_j u}$

b) $$f_{*j} \circ f^{\circ_j w}(z) = f_{*j}(z)\,\frac{\partial}{\partial z} f^{\circ_j w}(z) = \frac{\partial}{\partial w} f^{\circ_j w}(z)$$

c) $$f^{\circ_j w}(z) = {}^{j*}f\left[w + f^{*j}(z)\right] \quad ; \quad \int_z^{f^{\circ_j w}(z)} f_{*j}^{-1}(\zeta)\,d\zeta = w$$

d) *si* h *est un élément de* $\mathcal{H}_f$, *d'inverse* $h^{\circ(-1)}$ *et si on pose*

$${}^c h.f = h^{\circ(-1)} \circ f \circ h$$

alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \left({}^c h.f\right)^{\circ_j w} = {}^c h.\left(f^{\circ_j w}\right) \\ \left({}^c h.f\right)_{*j} = f_{*j'} \circ h / h' \\ \left({}^c h.f\right)^{*j} = \mathrm{Cste} + f^{*j'} \circ h \end{array}\right| \quad \underline{\textit{avec}} \quad j' = \mathrm{Cste} + j.$$

Indiquons pour terminer une liste de relations permettant la construction effective des éléments itératifs.

<u>Théorème 10</u> : <u>(Diverses caractérisations "constructives" des éléments itératifs)</u> (Hypothèses et notations du théorème 7)

a) *<u>Caractérisation constructive du logarithme itératif sectoriel</u> :*

(49) $$f_{*j}(z) = \lim_{n \to (-1)^{j+1}\infty} \frac{f^{\circ(n+1)}(z) - f^{\circ n}(z)}{\frac{d}{dz} f^{\circ n}(z)}$$

uniformément sur tout secteur (ou : sur tout compact) de $\mathcal{U}_j$.

b) *<u>Caractérisation constructive de l'itérateur sectoriel</u> :*

(50) $$\left\{\begin{array}{l} f^{*j}(z) = \mathrm{Cste} + \lim\limits_{n \to (-1)^{j+1}\infty} \left\{ F \circ f^{\circ n}(z) - n \right\} \\ \textit{avec} \quad F(z) = \frac{p+1}{2} \log z + \textit{une primitive de } (f(z) - z)^{-1} \end{array}\right.$$

uniformément sur tout secteur (ou : sur tout compact) de $\mathcal{U}_j$.

c) *<u>Caractérisation constructive de l'itérée complexe sectorielle</u>.*

On suppose ici : $p = \textit{valit } f = 1$

Quel que soit Φ élément de $H^1(\mathcal{U}_j)$ (i. e. Φ holomorphe et intégrable sur $\mathcal{U}_j$) on a :

(51)
$$\Phi \circ f^{\circ w}(z) = \Phi(z) + \sum_{n \geq 1} C^n_{(-1)^{j+1} w}\, U_n(\Phi, f, z, j)$$

avec
$$\begin{cases} C^n_w = w(w-1)\ldots\ldots(w-n+1) \,/\, n! \\ U_n(\Phi, f, z, j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C^k_n\, \Phi \circ f^{\circ((-1)^{j+1}(n-k))}(z) \end{cases}$$

uniformément sur tout compact situé à la racine du rayon fondamental θ_j .

<u>Principe de la démonstration des théorèmes 7, 8, 9,10 :</u>

$\forall j \in \mathbb{Z}$ le changement de variable :

$$z \longrightarrow e^{i\theta_j} z$$

transforme la feuille $\mathcal{U}_j$ en un domaine $e^{-i\theta_j}\,\mathcal{U}_j$ contenant la racine du demi-axe réel positif, et ce même changement de variable transmute la transformation : $z \to f^{\circ(-1)^{j+1}}(z)$ en la transformation :

$$z \longrightarrow g(z) = e^{-i\theta_j}\, f^{\circ(-1)^{j+1}}(e^{i\theta_j} z)$$

avec
$$\begin{cases} g \text{ holomorphe en un voisinage (complet, i.e. non} \\ \text{"sectoriel") de } 0 \text{ ; et } g \text{ de la forme :} \\ g(z) = z - r_0^p z^{p+1} + o(z^{p+1}) \quad (r_0 > 0) \end{cases}$$

Il résulte aisément de là qu'on peut trouver un secteur V du type $V\left(-\frac{\pi}{3p}, \frac{\pi}{3p} ; h\right)$ (prendre h assez petit > 0) tel que la restriction de g à V appartienne non seulement à $\mathcal{G}_{h-}(V, p, \infty)$, mais encore à $\mathcal{G}_{hu-}(V, p, \infty)$ où p = valit f = valit g (voir § 2).

On est alors à même d'utiliser la théorie des semi-groupes $\mathcal{G}_{hu-}(V, p, \infty)$ et les théorèmes 3,4, 5 et 6 du § 2, chapitre III. On construit les éléments sectoriels de g considéré comme élément de $\mathcal{G}_{hu-}(V, p, \infty)$ puis, effectuant le changement de variable inverse : $z \to e^{-i\theta_j} z$, on en tire des éléments sectoriels de $f^{\circ(-1)^{j+1}}$, et donc de f , définis à la racine du rayon fondamental θ_j

(*plus précisément : sur le secteur* $V_j = e^{i\theta_j} V$) *et satisfaisant, selon les cas, aux conditions* (α), (β) *ou* (γ) *du théorème 7, a).*

On obtient ensuite la prolongation analytique, à $\mathcal{U}_j$ *tout entier, de* f_{*j} (*resp.* f^{*j}) *en utilisant la relation fonctionnelle*

$$f_{*j} \circ f^{\circ n}(z) \,/\, \frac{d}{dz} f^{\circ n}(z) = f_{*j}(z) \; ; \forall n \in (-1)^{j+1}\mathbb{N}$$

(*resp.* $f^{*j} \circ f(z) = n + f^{*j}(z)$) *déjà vérifiée sur* V_j *, et en observant que pour tout* z *de* $\mathcal{U}_j$, $f^{\circ n}(z)$ *appartient à* V_j *dès que* $(-1)^{j+1} n$ *est assez grand.*

Les autres assertions des théorèmes 7, 8, 9, 10 sont alors aisément déduites des résultats correspondants du § 2, relatifs aux semi-groupes $\mathcal{G}_{h-}(V, \rho, \infty)$ *et* $\mathcal{G}_{hu-}(V, \rho, \infty)$

§ 4 : NATURE DU GROUPE W_f DES ORDRES D'ITERATIONS ADMISSIBLES DES f DE $\mathcal{G}_k$.

Divers auteurs, et notamment M. Kuczma, dans [19] *, page ... , ont posé une question, qui moyennant nos notations, s'exprime ainsi : étant donné un élément f de $\mathcal{G}_k$ non pleinement itérable $\left(\text{i.e. } f \notin I\mathcal{G}_k\right)$, peut-il arriver que f admette des itérées globales d'ordre w pour tout w complexe de la forme mu_0+nv_0 où u_0 est un rationnel donné, et v_0 un complexe, non réel, donné ? Nous allons montrer que c'est impossible.*

Théorème 11 : Etant donné un élément f de $\mathcal{G}_k$ on désigne par W_f le sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ formé des ordres d'itération admissibles de f, c'est-à-dire des complexes w tels que f admette une itérée globale d'ordre w. Alors deux cas seulement peuvent se présenter :

premier cas : f est pleinement itérable, et alors bien sûr : $W_f = \mathbb{C}$

deuxième cas : f n'est pas pleinement itérable, et alors W_f est réel, discret, et de la forme $q^{-1}\mathbb{Z}$, où q est le plus grand entier tel que l'équation $g^{\circ q} = f$ admette une solution g dans $\mathcal{G}_k$.

Démonstration : Le théorème 11 résultera de la théorie générale des invariants holomorphes, qui sera développée dans la partie B. Toutefois, nous pouvons dès maintenant montrer la réalité de W_f lorsque f n'est pas itérable.

Soit en effet f non pleinement itérable, de valuation itérative p, et donc de la forme :

$$f(z) = z + az^{p+1} + o(z^{p+1}) \qquad (a \neq 0)$$

Supposons W_f non réel. Puisque de toute façon $W_f \supset \mathbb{Z}$, le groupe W_f n'est pas porté par un axe unique : $\operatorname{Arg} w = \theta$, et contient des w d'arguments partout denses sur $[0,2\pi]$. Soit donc un w_0 de W_f tel que :

(52) $\quad 0 < \operatorname{Arg} w_0 < \pi/p \quad$ *et posons :* $\quad g = f^{\circ w_0}$.

On aura évidemment : (53) $g(z)-z \sim w_0(f(z)-z)$ *quand* $z \to 0$.

Soient $\mathcal{U}_j(f)$ *et* $\mathcal{U}_j(g)$ *les feuilles de* f *et* g ; $\theta_j(f)$ *et* $\theta_j(g)$ *leurs rayons fondamentaux :*

D'après le théorème 7-a et compte tenu de (53), f_{*j} *et* g_{*j} *sont caractérisées par les relations*

(54) $$\begin{cases} f_{*j}\circ f/f' = f_{*j} \\ f_{*j}(z) \sim f(z)-z \end{cases}$$ *à la racine du rayon* $\theta_j(f)$

(55) $$\begin{cases} g_{*j}\circ g/g' = g_{*j} \\ g_{*j}(z) \sim w_0(f(z)-z) \end{cases}$$ *à la racine du rayon* $\theta_j(g)$

Mais puisque $f\circ g = g\circ f = f^{\alpha(1+w_0)}$ *on tire de (55) en substituant* $f(z)$ *à* z (**)

(56) $$\begin{cases} g_{*j}\circ g\circ f/(g'\circ f)f' = g_{*j}\circ g\circ f/(g\circ f)' = \left\{\dfrac{g_{*j}\circ f}{f'}\right\}\circ g/g' = g_{*j}\circ f/f' \\ (g_{*j}\circ f)/f'(z) \sim w_0\,\{f\circ f(z) - f(z)\} \sim w_0\,(f(z)-z) \end{cases}$$

Mais puisque (55) caractérise g_{*j}, *(56) implique :*

(57) $$\begin{cases} g_{*j}\circ f/f' = g_{*j} \\ \text{et bien sûr, comme ci-avant :} \\ g_{*j}(z) \sim w\,(f(z)-z) \end{cases}$$ *(sur tout* $\mathcal{U}_j(g)$*)*

Or w_0 *vérifie (52) et il est clair que la feuille* $\mathcal{U}_j(g)$ *qui contient des secteurs* $V\left(\theta_j(g)-\frac{\pi}{p}+\alpha,\ \theta_j(g)+\frac{\pi}{p}-\alpha\,;\ \lambda(\alpha)\right)$ *aussi petit que soit* α *contient aussi la racine du rayon* $\theta_j(f)$ *et la racine du rayon* $\theta_{j+1}(f)$

Cela étant, compte tenu de (57), et puisque (54) caractérise f_{*j} *on trouve :*

(58) $$\begin{cases} g_{*j}(z) \equiv w_0\, f_{*j}(z) \quad \text{à la racine de } \theta_j(f) \text{ et} \\ \text{par suite sur tout } \mathcal{U}_j(f)\cap\mathcal{U}_j(g) \end{cases}$$

(**) et en divisant par f'.

Et on montrerait de même :

(58 bis) $\begin{cases} g_{*j}(z) \equiv w_0\, f_{*(j+1)}(z) & \text{à la racine de } \theta_{j+1}(f) \text{ et} \\ \text{par suite sur tout } \mathcal{U}_j(g) \cap \mathcal{U}_{j+1}(f) \end{cases}$

En rapprochant (58) et (58 bis), on voit que f_{*j} et f_{*j+1} coïncident sur le "domaine" $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_j(g) \cap \mathcal{U}_{j+1}(f)$, qui n'est pas vide, et par suite sur $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_{j+1}(f)$ tout entier.

Ceci étant vrai pour tout $j \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, on voit qu'il existe une fonction φ telle que :

$$\begin{cases} *)\ \varphi \text{ est holomorphe sur } \bigcup_j \{\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}\}, \text{ qui est} \\ \quad \text{un voisinage de } 0, \text{ privé de } 0. \\ **)\ \varphi(z) \sim f(z) - z \quad \text{quand } z \to 0. \\ ***)\ \varphi \circ f = f' \varphi. \end{cases}$$

Mais d'après le critère (β) du théorème 1,a du chapitre III cela prouve que f est pleinement itérable, en contradiction avec notre hypothèse. Ceci achève donc de prouver que W_f est soit $\mathbb{C}$ tout entier, soit un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Dans ce second cas, la discrétude de W_f pourrait elle aussi se démontrer directement, mais nous renvoyons aux résultats généraux de la partie B, dont elle découle d'une manière encore plus naturelle.

Théorème 12. (Critères de pleine itérabilité).

Soit $f \in \mathcal{G}_{h}$; valit $f = p < \infty$

Alors f est pleinement itérable si et seulement si est vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

(α) il existe un $w \notin \mathbb{Q}$ tel que $f^{g_j w}(z) \equiv f^{g_{j+1} w}(z)$ sur le domaine commun de définition, pour $j = 1, \ldots, 2p$.

(β) $f_{*j}(z) \equiv f_{*j+1}(z)$ *sur* $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, 2p$.

(γ) $f^{*j}(z) \equiv f^{*j+1}(z)$ *sur* $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, 2p$.

Cet énoncé est une simple conséquence des théorèmes 7 et 11.

CHAPITRE IV

PROPRIETES DE FERMETURE OU D'EXTREMALITE DES ENSEMBLES $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ FORMES DES $\tilde{f}$ PLEINEMENTS ITERABLES DE $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$.

§ 1 : INTRODUCTION - FERMETURE DE $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ SI $\theta \geqslant 1$.

Comme au chapitre II, on désigne par $\{\Gamma_n\}$, $\{\Delta_n\}$ etc ... des suites de type $\mathcal{R}$, sauf mention expresse du contraire.

On a vu en A, II, § 4 que l'itération "fractionnaire" ne modifie pas la classe des éléments $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ qui sont de valuation itérative nulle. En revanche, pour les $\tilde{f}$ de valuation itérative $\geqslant 1$, c'est-à-dire éléments de $\tilde{\mathcal{G}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, on n'a jusqu'à présent démontré que le théorème :

$$« \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\} \Rightarrow \tilde{f}^{\circ w} \in \tilde{\mathcal{G}}\{n\Gamma_n\} \ \forall w ».$$

Dans le présent chapitre nous montrons que dans certains cas, et notamment dans celui du groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{1\}$, isomorphe à $\mathcal{G}_k$ (voir chapitre précédent) le résultat ci-dessus ne peut pas être amélioré. En outre, on s'intéressera à la stabilité éventuelle (pour la loi de groupe "$\circ$", qui est la composition) des ensembles $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, formés des $\tilde{f}$ pleinement itérables de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$.

On verra que pour certaines $\{\Gamma_n\}$, l'ensemble $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ est fermé pour la composition, alors que pour d'autres $\{\Gamma_n\}$, il ne l'est pas du tout, et même qu'alors, dans un sens bien précis, si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont pleinement itérables dans $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, alors $\tilde{f}\circ\tilde{g}$ ne l'est <u>presque jamais</u>. Enfin, pour le cas important de la suite $\{\Gamma_n \equiv 1\}$, qui correspond à la "classe holomorphe", on énonce un résultat encore beaucoup plus fort. Tous les énoncés de ce second type traduisent des propriétés de non stabilité (par rapport à la composition) de $I\,\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, qui rappellent les propriétés de la frontière d'un domaine convexe dans un espace vectoriel (par rapport à la prise du barycentre de deux points de cette frontière). Cette analogie, qui explique l'expression de "théorèmes d'extrémalité", est en fait le point de départ d'une théorie riche et difficile, mais que nous ne développerons pas ici.

Commençons par rappeler, concernant les groupes de Lie et la formule de Campbell-Hausdorff, certains résultats dont nous nous servirons.

Soit $(x_1, \dots, x_r)$ r variables formelles non commutatives. Soit $\mathcal{A}((x))$ l'algèbre des sommes formelles du type (1) :

(1) $\sum \gamma_N x^N$, où les γ_N sont des coefficients complexes, où $N = \{n_{i,j}\}$ est un multiindice entier, et où

$$x^N = x_1^{n_{1,1}} \dots x_r^{n_{1,r}} \dots x_1^{n_{t,1}} \dots x_r^{n_{t,r}}$$

$\left(\text{avec } n_{i,j} \geq 0 \;;\; n_i = \sum_{1\leq j\leq r} n_{i,j} \geq 0 \;;\; |N| = \sum_{i,j} n_{i,j}\right)$

Désignons, pour toute paire (X, Y) d'éléments de $\mathcal{A}((x))$, par $[X,Y]$ le crochet de Lie, c'est-à-dire $XY-YX$.

Enfin, soit $\mathcal{L}((x))$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}((x))$ formé des sommes formelles du type (2) :

(2) $\sum \delta_N [x^N]$, où les δ_N sont des coéfficients complexes et où

$$[x^N] = [\dots[\underbrace{x_1,\dots]x_1}_{n_{1,1}}]\underbrace{x_2,\dots x_2}_{n_{1,2}}]\dots]\underbrace{x_r\dots x_r}_{n_{t,r}}]$$

(bien sûr $[x^N] = 0$ si $n_{1,1} > 0$).

Posons enfin

$$\begin{cases} (3) \quad \Phi(x) = (\exp x_1)(\exp x_2)\dots(\exp x_n) = 1 + \sum\limits_{|N|\geq 1} \varphi_N x^N \\ (4) \quad \Psi(x) = x_1 \# x_2 \# \dots \# x_n = \log \Phi(x) = \sum\limits_{|N|\geq 1} \psi_N x^N \end{cases}$$

(Les φ_N et les ψ_N sont des coefficients réels).

La méthode de Dynkine consiste à remarquer que si X est un élément de $\mathcal{A}((x))$, homogène en x de degré n (c'est-à-dire de la forme $X = \sum \gamma_N x^N$ avec $|N| = n$) et si en outre X appartient en fait à $\mathcal{L}((x)) \subset \mathcal{A}((x))$ et si enfin on pose :

$$[X] = \sum \gamma_N [x^N] \quad , \text{ alors :}$$

(5) : $[X] = n\, X$; n degré de X .

Or on démontre en théorie des algèbres de Lie libres que $\Psi(x)$ est un "élément de Lie", i. e. appartient à $\mathcal{L}((x))$. Par suite, compte tenu de (4) et (5), on trouve :

$$(6) \quad x_1 \# x_2 \# \dots x_n = \Psi(x) = \sum_{|N|\geq 1} |N|^{-1} \psi_N [x^N]$$

Comme les coefficients φ_N, puis ψ_N , entrant dans (3) et (4), sont aisément calculables, (6) fournit une expression explicite de $\Psi(x)$ au moyen seulement de x_1 , ... x_n et du crochet de Lie.

Désignons comme en A, I, § 1, par $\tilde{\mathcal{E}}_2$ l'algèbre de Lie des séries formelles en z de la forme $\tilde{O}(z^2)$, munie de la loi de Lie : $\quad [\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}] = \left(\frac{d}{dz}\tilde{\tau}\right) \tilde{\sigma} - \tilde{\tau} \left(\frac{d}{dz}\tilde{\sigma}\right)$

On note que si $\tilde{a}_1$, ..., $\tilde{a}_n$ désignent n éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_2$ tels que $\tilde{a}_i(z) = \underline{\tilde{O}}(z^{1+p_i})$ $(p_i \geq 1)$, alors la substitution formelle de $\tilde{a}_i$ à x_i respectivement dans

(i) $\quad [x_i , x_j]$

(ii) $\quad [x^N]$ (*pour un multiindice entier* $N = \{n_{1,1} ; n_{2,2} ; \ldots , n_{t,r}\}$)

(iii) $\quad \Psi(x)$

fournit respectivement :

(j) un élément de $\tilde{\mathcal{E}}_2$ *de la forme* $\tilde{\mathcal{O}}(z^{1+p_i+p_j})$

(jj) un élément de $\tilde{\mathcal{E}}_2$ *de la forme* $\tilde{\mathcal{O}}(z^{1+p|N|})$ *où* $p = \inf\limits_i p_i \geqslant 1$

(jjj) une somme formelle $\sum \Psi_N \tilde{A}_N$ *(d'éléments* $\tilde{A}_N$ *de* $\tilde{\mathcal{E}}_2$ *)* *et ne comportant, pour tout entier* n *, qu'un nombre fini de termes de la forme* $\underline{\tilde{\mathcal{O}}}(z^m)$ *avec* $m \leqslant n$.

(jjj) montre que dans $\sum \Psi_N \tilde{A}_N$ *le coefficient de* z^n *est une somme finie de nombres réels et qu'il est donc possible de sommer* $\sum \Psi_N \tilde{A}_N$ *. Le résultat est désigné par* $\tilde{a}_1 \# \tilde{a}_2 \# \ldots \tilde{a}_r$ *;* *c'est un élément de* $\tilde{\mathcal{E}}_2$

__Théorème 1__ : Utilisons les notations précédentes et supposons que $\tilde{a}_i \in \tilde{\mathcal{E}}_2$ *et que* $\tilde{a}_i \in \tilde{\mathcal{C}}\{n^\theta\}$ $(\theta \geqslant 0 ; i = 1, \ldots, r)$

Alors :

$$(\tilde{a}_1 \# \ldots \tilde{a}_r) \in \tilde{\mathcal{C}}\{n^{\sup(1,\theta)}\}$$

__Démonstration__ :

Du fait de l'associativité manifeste de la loi $\#$ *, on pourrait se limiter au cas où* $r = 2$ *, mais autant raisonner directement sur un* r *quelconque.*

Posons :

$$\tilde{a}_i(z) = \sum_{m \geqslant 1} \alpha_{i,m} \, z^{1+m} \tag{7}$$

Alors, d'après (6) et (7) :

$$(\tilde{a}_1 \# \ldots \tilde{a}_r)(z) = \sum_{|N| \geqslant 1} |N|^{-1} \Psi_N \sum_{\begin{cases} m_i \geqslant 1 \\ n = |N| \end{cases}} \alpha_{n_1, m_1} \ldots \alpha_{n_n, m_n} [\ldots [z^{1+m_1}, \ldots] \ldots z^{1+m_n}] \tag{8}$$

où la suite $(n_1, \ldots, n_n)$ *est fonction du multi-indice* $N = \{n_{i,j}\}$

Mais on vérifie que :

$$\left[\ldots \left[z^{1+m_1}, \ldots \right] \ldots z^{1+m_n} \right] = (m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - m_3) \ldots (m_1 + \ldots + m_{n-1} - m_n)\, z^{1+m_1+\ldots+m_n}$$

Par suite :

(9) $$\left(\tilde{a}_1 \# \ldots \tilde{a}_r \right)(z) = \sum_{m \geqslant 1} K_m z^{1+m} \quad \text{avec :}$$

(10) $$\begin{cases} |K_m| \leqslant K'_m K''_m K'''_m & \text{où l'on a posé :} \\ K'_m = \sum_{|N| \leqslant m} |N|^{-1} \cdot |\Psi_N| \\ K''_m = \sup_{n \leqslant m} K''_{m,n} \quad \text{et} \quad K''_{m,n} = \sum_{(m_i \geqslant 1;\, \Sigma m_i = m)} 1 \\ K'''_m = \sup_{(m_i \geqslant 1;\, \Sigma m_i = m)} \left\{ |m_1 - m_2| |m_1 + m_2 - m_3| \ldots |m_1 + \ldots + m_{n-1} - m_n| |\alpha_{r_1 m_1} \ldots \alpha_{r_n m_n}| \right\} \end{cases}$$

Or, en se reportant à (3) et (4), et en raisonnant sur la substitution de $y = \Phi(x) - 1$ *dans les séries formelles* $-\log(1-y)$ *et* $\log(1+y)$*, on peut montrer que* $\left(\sum_{|N| \leqslant m} |\Psi_N| \right)^{1/m}$ *reste inférieur à une certaine constante* $h = h_r < \infty$ *lorsque* m *parcourt* $\mathbb{N}$.

Donc, a fortiori :

$$\left(K'_m \right)^{1/m} < h'$$

On vérifie ensuite que $K''_{m,n} = C^m_{m+n-1} \leqslant C^m_{2m}$ *si* $n \leqslant m$

et de là on tire :

(12) $$\left(K''_m \right)^{1/m} < h''$$

En troisième lieu, puisque $\tilde{a}_i \in \tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_m = m^\theta\}$*, il existe* $C > 0$ *tel que* $|\alpha_{i,m}| < C^m \Gamma_m^m \quad (\forall i \leqslant r;\, \forall m \in \mathbb{N})$

et l'on en tire :

(13) $$K''_m \leqslant C^m \sup_{(q \leqslant m;\, \Sigma m_i = m)} \left\{ \Gamma_{m_1}^{m_1} \ldots \Gamma_{m_q}^{m_q} m_1 (m_1 + m_2) \ldots (m_1 + \ldots m_q) \right\}$$

Finalement, de (9), (10), (11), (12) et (13) on déduit que $(\tilde{\alpha}_1 \# \dots \tilde{\alpha}_n)$ *est de classe* $\tilde{\mathcal{E}}\{\Delta_m\}$ *avec :*

$$(14) \qquad \Delta_m = \sup_{(m_i \geq 1;\, \Sigma m_i = n)} \left\{ m_1(m_1+m_2)\dots(m_1+\dots m_q)\Gamma_{m_1}^{m_1}\cdots\Gamma_{m_q}^{m_q} \right\}^{1/m}$$

Mais, par suite des propriétés usymptotiques de la fonction factorielle, la classe $\tilde{\mathcal{E}}\{\Gamma_n = n^\theta\}$ *et la classe* $\tilde{\mathcal{E}}\{\Gamma'_n = (n!)^{\theta/n}\}$ *coïncident. Finalement, on peut remplacer dans (14)* Γ_n *par* Γ'_n, *ce qui changera* Δ_m *en* Δ'_m. *Ensuite, si* $\theta > 1$, *à partir de la relation :*

$$\left(\Gamma'_{m_1}\right)^{m_1}\left(\Gamma'_{m_2}\right)^{m_2} m_1 \leq \left(\Gamma'_{m_1+m_2}\right)^{m_1+m_2}$$

qui équivaut à la relation évidente : $\left(C^{m_1}_{m_1+m_2}\right)^\theta \geq m_1$ $(\text{si } m_2 \geq 1)$

et en raisonnant par récurrence sur m, *on voit que* $\Delta'_m \leq \Gamma'_m = (m!)^{\theta/m}$, *ce qui achève de démontrer le théorème 1 dans le cas où* $\theta \geq 1$, *et donc aussi dans le cas où* $0 \leq \theta < 1$ *Dans ce dernier cas, on peut en outre prouver que le résultat du théorème 1 ne peut pas être amélioré (cela résultera d'ailleurs immédiatement des résultats du paragraphe suivant).*

Venons-en maintenant à l'objet principal de ce paragraphe et énonçons le

Corollaire du théorème 1 : (dit "théorème de fermeture").

Si $\theta \geq 1$, *l'ensemble* $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$, *formé des* $\tilde{f}$ *du groupe* $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ *qui sont pleinement itérables, est fermé (pour la loi du groupe* $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$, *c'est-à-dire la composition).*

Démonstration : En effet, soit $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *pleinement itérables dans* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$. *Alors, d'après le théorème 4 de (A, II, § 4),*

$\tilde{f}_*$ et $\tilde{g}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{n^\theta\}$, et d'après le théorème 1 ci-dessus, $\tilde{f}_* \# \tilde{g}_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{n^\theta\}$. Mais d'après le théorème 2 de (A, I, § 1) $\tilde{f}_* \# \tilde{g}_* = (\tilde{f} \circ \tilde{g})_*$, et enfin, d'après le théorème de (A, II, § 2) et puisque $(\tilde{f} \circ \tilde{g})_* \in \tilde{\mathcal{C}}\{n^\theta\}$, on peut affirmer que $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ est pleinement itérable dans $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$.

Remarque :

Bien entendu, ce théorème n'est substantiel que sous réserve de l'existence de $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ qui ne sont pas pleinement itérables. L'existence de tels $\tilde{f}$ est établie au paragraphe suivant, mais seulement dans le cas $\theta < 1$. Toutefois, elle paraît infiniment probable pour toutes les $\{\Gamma_n\}$, et en particulier dans le cas présent, c'est-à-dire pour $\{\Gamma_n = n^\theta\}$, avec $\theta > 1$.

§ 2 : THEOREME D'EXTREMALITE FAIBLE POUR $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ SI $0 \leq \theta < 1$.

Théorème 2 : (dit "théorème d'extrémalité faible")

a) soit $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ deux éléments de $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ ne commutant pas, et soit p et q leurs valuations itératives (p et $q \geq 1$).
Soit $P(w)$ et $Q(w)$ deux polynômes, de degrés p' et q' (p' et $q' \geq 0$)
Alors si $\theta < q^{-1}$ (resp $\theta < p^{-1}$) et si $q'/q > p'/p$ (resp $p'/p > q'/q$),
l'élément $\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ n'appartient à $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ (i.e. n'est pleinement itérable) pour presqu'aucun w complexe.

b) Si en outre $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, P et Q sont à coefficients réels, $\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)}$ n'appartient à $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ pour presqu'aucun w réel.

c) aux points a) et b) ci-dessus il suffit en fait de supposer que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{G}}$ pour conclure que $\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)}$ n'appartient presque jamais à $I\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$.

Démonstration du théorème 2 :

Nous aurons besoin du

Lemme 1 : Si, conservant les notations du paragraphe précédent, on pose : $x_1 \# x_2 = \log\left((\exp x_1)(\exp x_2)\right) = x_2 + \Delta(x_1, x_2) + \tilde{o}(x_1)$, c'est-à-dire si on désigne par $\Delta(x_1, x_2)$ la partie de $\Phi(x)$ linéaire en x_1, on a :

$$\begin{cases} \Delta(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[x_1, x_2] + \sum_{n \geq 0} \rho_{2n+1} [\ldots [x_1, \underbrace{x_2] x_2 \ldots x_2}_{2n+2}] \\ \text{avec } \sum_{n=-1}^{+\infty} \rho_n z^n = \frac{1}{2} th^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{e^\theta + 1}{e^\theta - 1} \end{cases}$$

Ce lemme ne peut pas se déduire directement de la formule de Dynkine, mais on peut l'obtenir à partir des théorèmes de K. Goldberg (cf [15]) ou encore de nos résultats sur la formule de Campbell-Hausdorff (cf [12]).

Cela étant, puisque $\tilde{f} \circ \tilde{g} \neq \tilde{g} \circ \tilde{f}$, c'est que $[\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] \neq 0$ d'après le théorème 2, de (A, I, § 1), et nous aurons par hypothèse :

$$P(w) = P_0 + P_1 w + \dots P_{p'} w^{p'} \quad ; \quad Q(w) = Q_0 + Q_1 w + \dots Q_{q'} w^{q'} \; (p'; q' \geq 0)$$

$$\tilde{f}_*(z) = \alpha_p z^{p+1} + \tilde{o}(z^{p+1}) \quad ; \quad \tilde{g}_*(z) = \beta_q z^{q+1} + \tilde{o}(z^{q+1}) \quad (p; q \geq 1)$$

$$[\tilde{f}_*, \tilde{g}_*](z) = \gamma \alpha_p \beta_q z^{1+r+p+q} \times (1 + \tilde{O}(z)) \text{ avec } \begin{cases} r = 0 \text{ et } \gamma = p - q \text{ si } p \neq q \\ r > 0 \text{ et } \gamma \neq 0 \text{ si } p = q \end{cases}$$

et si nous posons pour abréger : $x_1 = P(w)\tilde{f}_*$ et $x_2 = Q(w)\tilde{g}_*$ nous aurons, en vertu du paragraphe précédent et du théorème de (A, I, § 2,a) :

$$(16) \qquad \left(\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)} \right)_* = x_1 \# x_2 .$$

Or $x_1 \# x_2$ est une somme de termes de la forme

$$[x^N] = [\dots[\underbrace{x_1, \dots x_1}_{n_{1,1}}]\underbrace{x_2 \dots x_2}_{n_{1,2}}] \dots] \dots \underbrace{x_2}_{n_{t,2}}] \quad ; \; N = \textit{multi-indice}: \{n_{i,j}\}$$

et le calcul montre que dans $[x^N]$ le terme de plus bas degré en z est de la forme

$$R(w) \quad z^{1+r+(\sum_i n_{i,1})p + (\sum_i n_{i,2})q}$$

où $R(w)$ est un polynôme en w de degré égal à $(\sum_i n_{i,1})p' + (\sum_i n_{i,2})q'$. Cette remarque prouve que si l'on suppose par exemple $q'/q > p'/p$ et que si l'on pose :

$$(17) \qquad (x_1 \# x_2)(z) = \sum_n S_n(w) z^{n+1} = \tilde{A}(w,z) + \tilde{B}(w,z)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A(w,z) = \sum_{t=0}^{+\infty} S_{r+p+2tq}(w)\, z^{1+r+p+2tq} \\ B(w,z) = \sum_{n \neq r+p \pmod{2q}} S_n(w)\, z^{1+n} \end{cases}$$

alors, pour tout entier $t \geq 0$, *le polynôme* $S_{r+p+2tq}$ *aura son terme de plus haut degré en* w *provenant de la partie de* $x_1 \# x_2$ *qui est de plus bas degré possible en* x_2 *, c'est-à-dire en fait, provenant de* $\Delta(x_1,x_2)$.

Par suite, le degré de $S_{r+p+2tq}$ *sera* $p'+2tq'$ *et son terme le plus haut degré en* w *proviendra du terme (cf. lemme 1) :*

$$\tilde{M}_{2t} = \mu_{2t-1}\, [\ldots[x_1, \overbrace{x_2]\ldots\, x_2]}^{2t}$$

On calcule à partir de (15) que :

$$\tilde{M}_{2t}(w) = \mu_{2t-1}\alpha_p P(w)\bigl(\beta_q Q(w)\bigr)^{2t} \left\{\prod_{s=0}^{2t-2}(r+p+sq)\right\} z^{1+r+p+2tq} + \tilde{o}\left(z^{1+r+p+2tq}\right)$$

Par suite, le terme de plus haut degré en w *de* $S_{r+p+2tq}(w)$ *est*

$$\mu_{2t-1}\,(\gamma\,\alpha_p P_{p'})\,(\beta_q Q_q)^{2t} \prod_{s=0}^{2t-2}(r+p+sq)\; w^{p'+2tq'}$$

et $S_{r+p+2tq}(w)$ *peut se mettre sous la forme :* $w^{p'+2tq'}\, T_{r+p+2tq}(1/w)$

(18) $T_{r+p+2tq}(1/w)$ *est un polynôme en* $(1/w)$, *de degré affine en* t,

où

(19) $$\left|T_{r+p+2tq}(0)\right| = \mu_{2t-1}\,(\gamma\,\alpha_p P_{p'})\,(\beta_q Q_{q'})^{2t} \prod_{s=0}^{2t-2}(r+p+sq)$$

Mais le lemme 1, énoncé ci-dessus, implique

(20) $$\limsup \left|\mu_n\right|^{1/n} = 1/2\pi$$

De plus :

(21) $$q^{2t-2}(2t-2)! < \prod_{s=0}^{2t-2}(r+p+sq) < (r+p+q)^{2t-2}(2t-2)!$$

A partir de (19), (20), et (21), il est immédiat que :

$$(22)\qquad 0 < \limsup_{t\to\infty} \left| T_{r+p+2tq}(0) \right|^{1/(r+p+2tq)} (r+p+2tq)^{-(1/q)} < \infty$$

Mais si l'on pose : $\tilde{C}(v,z) = \sum_{t\geq 0} T_{r+p+2tq}(v)\, z^{1+r+p+2tq}$

et si on suppose que $0 \leq \theta < 1/q$, les inégalités (22) expriment que la série $\tilde{C}(0,z)$ n'est pas de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{n^{\theta}\}$, et par suite, d'après le lemme 2 de (A, II, § 4), la série (en z) $\tilde{C}(v,z)$ n'appartient à $\tilde{\mathcal{C}}\{n^{\theta}\}$ pour presque aucun v complexe.

A partir de là il est immédiat que la série (en z) :

$$\tilde{A}(w,z) = \sum_{t} w^{p'+2tq'}\, T_{r+p+2tq}(1/w)\, z^{1+r+p+2tq}$$

et donc aussi la série (en z) :

$$(x_1 \# x_2)(z) = \left(\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)} \right)_*$$

n'appartient à $\tilde{\mathcal{C}}\{n^{\theta}\}$ pour presque aucun w complexe. Or, comme d'après le théorème 4 de (A, II, § 4) un élément $\tilde{h}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{n^{\theta}\}$ n'est pleinement itérable que si son logarithme itératif $\tilde{h}_*$ est de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{n^{\theta}\}$, l'assertion du théorème 1, a) se trouve démontrée dans le cas $q'/q > p'/p$; et le cas $p'/p > q'/q$ s'en déduit aussitôt car :

$$\left(\tilde{f}^{\circ P(w)} \circ \tilde{g}^{\circ Q(w)} \right)^{\circ(-1)} = \tilde{g}^{\circ(-Q(w))} \circ \tilde{f}^{\circ(-P(w))}$$

Quant au point b, relatif à des $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, P et Q à coefficients réels, il se démontre d'une manière tout analogue.

Enfin, le point c résulte tout simplement de ce que les hypothèses : « $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}}\{n^{\theta}\}$ et $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}\{n^{\theta}\}$ » n'ont été utilisées nulle part dans les démonstrations précédentes.

Enonçons maintenant une conséquence immédiate mais capitale du théorème 2 :

Corollaire du théorème 2 :

Pour chaque $\theta \in [0,1[$, il existe dans le groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{n^{\theta}\}$ des $\tilde{f}$ non pleinement itérables (et, en un sens que l'on a précisé, les $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{n^{\theta}\}$ sont même "presque toujours" non itérables).

§ 3 : CAS "HOLOMORPHE". THEOREME D'EXTREMALITE FORTE. COMPLEMENTS.

Le théorème 2 ci-avant, dit d'extrémalité faible, s'applique en particulier au groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$ *, isomorphe au groupe* $\mathcal{G}_h$ *des transformations holomorphes (cf. A, III) et il confirme, tout en l'élargissant considérablement, l'énoncé du théorème* 2 *de (A, III, § 1). En fait, nous allons voir que dans ce cas, nous pouvons énoncer un résultat encore plus fort. D'une façon précise :*

Théorème 3 (dit d'"extrémalité forte")

$\mathcal{G}_h$ *désigne, comme en (A, III), le groupe (pour la composition) formé des* f *holomorphes au voisinage de* 0 *et telles que :* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$ *. Dans ces conditions :*

a) Si $P(w)$ *et* $Q(w)$ *sont deux polynômes en* w *, non tous deux constants, et si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathcal{G}_h$*, pleinement itérables et tels que* $f \circ g \neq g \circ f$*, alors l'élément* $f^{\circ P(w)} \circ g^{\circ Q(w)}$ *de* $\mathcal{G}_h$ *n'est pleinement itérable que (au plus) pour un nombre fini de* w *inférieurs en module à* n $(\forall n \in \mathbb{N})$.

b) Plus généralement, soit h_w *un élément de* $\mathcal{G}_h$ *qui dépend d'une façon holomorphe* (**) *d'un paramètre complexe* w *, lorsque* w *varie sur un domaine* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{C}$ *.*
Alors s'il existe ne serait-ce qu'un $w_0 \in \mathcal{D}$ *tel que* h_{w_0} *ne soit pas pleinement itérable, et si* K *est un compact de* $\mathcal{D}$ *,*

(**) *On trouvera en (B, III, § 1) la définition exacte de la dépendance holomorphe en* w *d'un élément* h_w *de* $\mathcal{G}_h$ *.*
NB On suppose : valit h_w = Cste.

h_w n'est pleinement itérable que pour un nombre nul ou fini de w appartenant à K.

c) L'énoncé du point b) reste vrai lorsqu'on remplace "pleinement itérable" par "possédant dans $\mathcal{G}_k$ une racine d'itération d'ordre entier donné n_0 ".

Démonstration : En (B, II, §3 Th 7,8) on démontrera indépendamment un résultat, qui, avec les notations du théorème ci-dessus s'énonce : "une condition nécessaire et suffisante pour que h_w soit pleinement itérable (resp. admette dans $\mathcal{G}_k$ une racine d'itération d'ordre entier n_0) est que $I_i(h_w) = 0$, $\forall i \in J$ (resp. $\forall i \in J_{n_0}$), où J et J_{n_0} sont certains ensembles d'indices, et où les applications $w \to I_i(h_w)$ sont holomorphes sur $\mathcal{D}$ pour tout i fixé".

Par suite, si pour un certain w_0 de $\mathcal{D}$, h_w n'est pas pleinement itérable (resp. n'admet pas dans $\mathcal{G}_k$ de racine d'itération d'ordre n_0), il existe au moins un i de J (resp. J_{n_0}) tel que $I_i(h_{w_0}) \neq 0$.

Par suite la fonction holomorphe $w \to I_i(h_w)$ ne peut s'annuler qu'au plus un nombre fini de fois sur tout compact donné de $\mathcal{D}$. Les points b et c en résultent aussitôt.

Reste le point a : compte tenu du théorème 2 ci-dessus (A, IV, § 2) il existe bien un complexe w_0 tel que $f^{\circ P(w_0)} \circ g^{\circ Q(w_0)}$ ne soit pas pleinement itérable, ce qui nous ramène au cas du point b, et achève la démonstration.

Pour clore ce chapitre, énonçons sans démonstration un théorème qu'on peut aussi ranger parmi les théorèmes d'"extrémalité", puisqu'il fournit un exemple concret de famille d'éléments

h_w de $\mathcal{G}_k$ qui ne sont pas pleinement itérables pour certaines valeurs du paramètre w .

Théorème 4 : Soit f, g et k trois éléments de $\mathcal{G}_k$, et supposons k pleinement itérable. Alors, lorsque w tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, comme la valuation itérative de $h_w = f \circ k^{\circ w} \circ g$ reste fixe et égale à p (pour w assez grand tout au moins) et que les rayons fondamentaux $\theta_j(h_w)$ tendent vers des limites θ_j , on peut, pour tout $j \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ envisager les itérées fractionnaires d'indice j et d'ordre $(1/w)$ de h_w , et être assuré qu'elles sont définies à la racine du rayon θ_j . Alors, en un certain sens naturel et qu'on peut préciser on a :

$$\lim_{w \to +\infty} \left(f \circ k^{\circ w} \circ g\right)_j^{\circ(1/w)} = \begin{cases} f \circ k \circ f^{\circ(-1)} & \text{si} \quad j \equiv 0 \bmod 2. \\ g^{\circ(-1)} \circ k \circ g & \text{si} \quad j \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

D'où le corollaire immédiat :

Corollaire du théorème 4 : Si en sus des hypothèses du théorème 4 on suppose que $g \circ f \circ k \neq k \circ g \circ f$, alors l'élément $h_w = f \circ k^{\circ w} \circ g$ de $\mathcal{G}_k$ n'est pleinement itérable pour aucun w réel assez grand.

(*Indications* : raisonner sur les $(h_w)^{\circ_j(1/w)}$ et $(h_w)^{\circ_{j+1}(1/w)}$ à la racine du rayon bissecteur des rayons θ_j et θ_{j+1}).

P A R T I E   B

T H E O R I E   D E S   I N V A R I A N T S   H O L O M O R P H E S

CHAPITRE I

GENERALITES ET CAS ELEMENTAIRES

§ 1 : GENERALITES. INVARIANTS PURS ET MIXTES. SEMI-INVARIANTS. HOMOGENEITE ITERATIVE D'UN INVARIANT. SYSTEMES COMPLETS ET SYSTEMES LIBRES D'INVARIANTS.

Dans cette partie B nous allons appliquer la théorie itérative au calcul des "invariants géométriques", tant purs que mixtes, des transformations, et ceci pour les principaux groupes introduits dans la partie A.

Ensuite, nous utiliserons ces mêmes "invariants géométriques" pour énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de conjugabilité des transformations, et pour résoudre divers autres problèmes du même type.

Définition 1 : Soit G un groupe, et f, g ... ses éléments. Soit Aut G le groupe des automorphismes de G, et K un sous-groupe quelconque de Aut G. Enfin, soit E un ensemble quelconque.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dira qu'une application

$(g_1, \dots, g_n) \longrightarrow I(g_1, \dots, g_n)$ de G^n dans E définit un (n,K)-invariant sur G si pour tout élément σ de K on a :

$I(\sigma g_i) = I(g_i)$. Autrement dit, I doit ne pas changer lorsqu'on remplace simultanément tous ses arguments par leurs conjugués sèlon un même automorphisme σ de G ; $\forall \sigma \in K$.

b) Si $n = 1$ $(\text{resp } n > 1)$ on dira que I est un K-invariant pur (resp. mixte).

Si $K = \text{Aut } G$ (resp $K \subset \text{Aut } G$ strictement) on dira que I est un n-invariant (resp. un n-semi-invariant).

Les semi-invariants sont d'autant plus intéressants que K est plus vaste. On s'intéressera surtout aux cas où :

$(\text{Aut } G) / K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

c) Deux éléments g et g de G seront dits K-conjugables (resp.: conjugables) s'il existe au moins un élément σ de K (resp. de Aut G) tel que : $g = \sigma g$.

Un système $\{I_i\}$ $(i \in J$; $J =$ ensemble d'indices$)$ d'invariants (resp. de K-invariants) de G sera dit complet si, pour toute paire (g, g) d'éléments de G , une condition nécessaire et suffisante de conjugabilité est que :

$$I_i(g) = I_i(g) \quad ; \forall i \in J .$$

d) Un système $\{I_i\}(i \in J)$ d'invariants (resp. de K-invariants) de G sera dit libre si pour tout i de J il existe au moins une paire (g, g) d'éléments de G tels que :

$$I_i(g) \neq I_i(g) \quad \text{et} \quad I_j(g) = I_j(g) \quad (\forall j \in J ; j \neq i)$$

e) Les notions de complétude et de liberté introduites ci-dessus pour les systèmes d'invariants purs d'étendent naturellement aux cas des systèmes d'invariants mixtes.

f) Si E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *(ou un* $\mathbb{Z}$ *-module) on dira qu'un* (n,K)*-invariant de* G *est itérativement homogène d'ordres* $A_1, \ldots, A_n$ *par rapport à chacune de ses* n *variables si pour tout* $\{g_r\} \in G^n$ *et tout* $\{m_r\} \in \mathbb{N}^n$ (ou: $\mathbb{C}^n$) *on a :*

$$I(g_1^{\circ m_1}, \ldots, g_n^{\circ m_n}) = m_1^{A_1} \ldots m_n^{A_n} \, I(g_1, \ldots, g_n)$$

où les A_r *ne dépendent pas des* m_r *, mais seulement de* I *(et éventuellement aussi des* g_r *).*

§ 2 : CAS ELEMENTAIRE : LES INVARIANTS PURS DANS $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$.

Nous allons examiner dans ce paragraphe les deux seuls cas élémentaires : le cas des invariants purs de $\tilde{\mathcal{G}}$ et le cas des invariants purs de $\tilde{\mathcal{H}}$ (Voir A, I, § 1, définition 1).

Comme dans la partie A, C *désigne l'application :* $\tilde{f} \to \overline{(\tilde{f})}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *(resp. de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$*), c'est-à-dire la conjugaison complexe des coefficients. Pour tout* $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{H}}$*, d'inverse* $\tilde{k}^{\circ(-1)}$*,* ${}^c\tilde{k}$ *désigne l'isomorphisme :* $\tilde{f} \longrightarrow {}^c\tilde{k}.\tilde{f} = \tilde{k}^{\circ(-1)} \circ \tilde{f} \circ \tilde{k}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *(resp. de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$*). Enfin, on rappelle que pour tout* $\tilde{f}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *ou* $\tilde{\mathcal{H}}$*, on désigne par valit* $\tilde{f}$ *l'entier* p *tel que* $\tilde{f}(z) = z + \underline{O}(z^{p+1})$*, et par résit* $\tilde{f}$ *le coefficient de* z^{-1} *dans la série* $(\text{logit}\,\tilde{f})^{-1}$.

Cela étant, on peut énoncer :

Théorème 1 :

a) Aut $\tilde{\mathcal{G}}$ = *Aut* $\tilde{\mathcal{H}}$*, et tout élément* σ *de Aut* $\tilde{\mathcal{G}}$ *est soit de la forme* ${}^c\tilde{k}$ $(\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{H}})$ *soit de la forme* ${}^c\tilde{k}.C$ avec $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{H}}$.
$\tilde{\mathcal{H}}$ *s'identifie donc d'une manière naturelle à un sous-groupe de Aut* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et de Aut* $\tilde{\mathcal{H}}$*, que l'on notera* ${}^c\tilde{\mathcal{H}}$*, et que l'on nommera : groupe des automorphismes primaires* (de $\tilde{\mathcal{G}}$, ou de $\tilde{\mathcal{H}}$).

b) Les fonctions valit et résit forment, ensemble, un système complet et libre de ${}^c\tilde{\mathcal{H}}$*-invariants scalaires de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et de* $\tilde{\mathcal{H}}$.

c) Les fonctions $\{\text{valit}\ ;\ \mathrm{Re}(\text{résit})\ ;\ |\mathrm{Im}(\text{résit})|\}$ *forment un système complet et libre d'invariants scalaires de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et de* $\tilde{\mathcal{H}}$.

Indications sur la démonstration :

Point a) : Ce résultat pourrait s'établir directement, mais il découle d'un résultat général établi par Roudakov dans [25], *où cet auteur indique la forme générale des automorphismes de certaines algèbres de Lie de dimension infinie.*

Points b et c). Nous avons indiqué les éléments de la démonstration dans [11] *. Cette démonstration repose essentiellement sur l'action d'un changement de variable* $z \to \tilde{k}(z)$ $(\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}})$ *sur le logarithme itératif d'un élément* $\tilde{f}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *ou de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *:*

$$(f)_* \longrightarrow \left({}^{c}\tilde{k} \,.\, \tilde{f}\right)_* = \left(\tilde{k}^{\circ(-1)} \circ \tilde{f} \circ \tilde{k}\right)_* = \left(\tilde{f}_* \circ \tilde{k}\right) / \tilde{k}' \,.$$

CHAPITRE II

LES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$ ET LEURS APPLICATIONS.

§ 1 : LES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$; LEUR DEFINITION ET PRINCIPALES PROPRIETES.

Remarquons d'abord que seule présente de l'intérêt l'étude des invariants purs dans le sous-groupe $\mathcal{G}_k$ de $\mathcal{H}_k$, et non pas dans $\mathcal{H}_k$ lui-même. Cela tient à ce qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments f et g de $\mathcal{H}_k \dot{-} \mathcal{G}_k$ soient conjugués (par rapport à un élément de ${}^c\mathcal{H}_k$) est que les éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\tilde{\mathcal{H}}\{1\} \dot{-} \tilde{\mathcal{G}}\{1\}$ qui leur correspondent soient conjugués par rapport à un élément $\tilde{k}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$, qui sera alors automatiquement dans $\tilde{\mathcal{H}}\{1\}$ (et on est ramené à l'énoncé de B, I, § 2, théorème 1, b et c). De fait, si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux éléments de $\tilde{\mathcal{H}} \dot{-} \tilde{\mathcal{G}}$, leurs valuations itératives sont nulles, et si en outre : $\tilde{f}'(0) = \tilde{g}'(0)$ on aura :

$$ {}^c\tilde{k} . \tilde{f} = \tilde{g} $$

en prenant par exemple : $\tilde{k} = {}^{**}\tilde{f} \circ \tilde{g}^{**}$ *(Voir A, I, § 2, Th.5,c).*

Or, si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont dans $\mathcal{H}\{\Gamma_n \equiv 1\}$, $\tilde{f}^{**}, {}^{**}\tilde{f}, \tilde{g}^{**}, {}^{**}\tilde{g}$ et par suite aussi $\tilde{k}$ appartiennent tous à $\tilde{\mathcal{G}}\{1\} \subset \tilde{\mathcal{H}}\{1\}$

(Voir A, II §§ 1, 2, 4). On peut donc légitimement se limiter, dans la suite, à l'étude des invariants purs de $\mathcal{G}_h$.

Commençons par rappeler certains résultats établis dans la partie A (spécialement au chapitre III) et qui nous seront indispensables dans la suite.

Rappel : f désigne ici un élément de $\mathcal{G}_h$; $p =$ valit f ; $\rho =$ résit f . f est de la forme $z + a z^{p+1} + o(z^{p+1})$ avec :

$$a = r_0^p e^{-ip\theta_0} \quad ; \quad r_0 > 0 \quad ; \ \theta_0 \in \left]-\pi/p, \pi/p\right] .$$

$\Delta(f)$ désigne le plus grand disque $\{z; |z| < r\}$ sur lequel f et $f^{\circ(-1)}$ sont holomorphes.

a) Pour tout j de $\mathbb{Z}$ (ou de $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$) on définit $\mathcal{U}_j (= \mathcal{U}_j(f))$ comme l'intérieur de l'ensemble :

$$\{z; f^{\circ n}(z) \in \Delta(f), \forall n \in (-1)^{j+1}\mathbb{N} \text{ et } \operatorname{Arg} f^{\circ n}(z) \to \theta_j \bmod 2\pi \text{ quand } n \to (-1)^{j+1}\infty\}$$

où l'on a posé : $\theta_j = \theta_0 + j\pi/p$.

$\mathcal{U}_j$ est dit "feuille d'indice j de f" . θ_j est dit "rayon fondamental d'indice j de f".

$\forall \alpha > 0$ (et $< \pi/p$) il existe $h(\alpha) > 0$ tel que $\mathcal{U}_j$ contienne le secteur

$$V\left(\theta_{j-1} + \alpha, \theta_{j+1} - \alpha ; h(\alpha)\right)$$ (Voir A, III, § 2-3).

Par suite, si $|j - j'| = 1$ et si on pose $\mathcal{U}_{j,j'}(f) = \mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_{j'}(f)$ l'ouvert $\mathcal{U}_{j,j'}(f)$ n'est pas vide. Et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad f^{\circ n}(\mathcal{U}_{j,j'}) = \mathcal{U}_{j,j'} .$$

b) Pour tout j de $\mathbb{Z}$ (ou de $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$) la suite

$\left(f^{\circ(n+1)}(z) - f^{\circ n}(z)\right) \Big/ \frac{d}{dz}\left(f^{\circ n}(z)\right)$ tend uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}_j$ vers une limite $f_{*j}(z) \neq 0$ lorsque n tend vers $(-1)^{j+1}\infty$.

La fonction holomorphe f_{*j} est dite "logarithme itératif sectoriel d'indice j" de f. f_{*j} possède en 0 sur $\mathcal{U}_j$ un développement asymptotique fort (Voir A, III, § 3) qui ne dépend pas de j et s'identifie à $(\tilde{f})_*$ (Voir A, III, § 3).

c) Soit maintenant j un élément de $\mathbb{Z}$ (et non plus de $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$); on définit sur $\mathcal{U}_j$ la fonction $\log_j z$ par :

$\log_j z = i\theta_j + \log(z e^{-i\theta_j})$ (log : détermination principale)

et on désigne par f^{*j} la primitive de f_{*j}^{-1} qui est de la forme

$$f^{*j}(z) = \rho \log_j z + F(z) + o(1) \quad \text{quand } z \to 0 \text{ sur } \mathcal{U}_j(f)$$

(où $F(z)$ est une fonction rationnelle du type :

$$\sum_{n=-p}^{n=-1} c_n z^n)$$

f^{*j} est dit "itérateur sectoriel d'indice j de f".

C'est une fonction univalente, qui réalise une bijection (de la feuille) $\mathcal{U}_j$ sur (l'ensemble) $\mathcal{U}^j = f^{*j}(\mathcal{U}_j)$

La bijection réciproque est notée f_{j^*}.

Il existe $y_j > 0$ et $< +\infty$ tel que les deux demi-plans $\{|\operatorname{Im} z| > y_j\}$ soient contenus dans $\mathcal{U}^j$

d) L'itérateur sectoriel f_{*j} est caractérisé (à une constante près) par l'existence d'un développement asymptotique fort (généralisé (*)) et par l'équation fonctionnelle suivante :

$$(1) \qquad f^{*j} \circ f(z) = 1 + f^{*j}(z) \quad , \forall z \in \mathcal{U}_j$$

Nous allons maintenant introduire les invariants de $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ et indiquer leurs principales propriétés au moyen d'une série de définitions (1 à 3) et de théorèmes (1 à 4), donnés les uns à la suite des autres. Toutes les démonstrations sont rejetées en fin de paragraphe.

(*) i.e. contenant un terme $\rho \log z$.

<u>*Définition 1*</u> : *Soit* $\varepsilon = \pm 1$ *et soit* j *un élément de* $\mathbb{Z}$. *Le "domaine"* $\mathcal{U}_{j,j+\varepsilon} = \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_{j+\varepsilon}$ *n'étant pas vide, et étant stable par rapport à la transformation* $z \longrightarrow f(z)$, *pour tout* z *de* $\mathcal{U}_{j,j+\varepsilon}$ (**) *on peut trouver un chemin* Γ, *intérieur à* $\mathcal{U}_{j,j+\varepsilon}$ *et joignant* z *à* $f(z)$. *On peut donc poser*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad \Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n}(z) = \int_{(\Gamma)} \left(f^{*j}(\zeta) - f^{*j+\varepsilon}(\zeta)\right) e^{-2\pi i n f^{*j+\varepsilon}_{-1}(\zeta)} f_{*j+\varepsilon}(\zeta)\, d\zeta$$

Puisque $f_{*j+\varepsilon}(z) \neq 0$, $\Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n}(z)$ *ne dépend pas de* Γ.

<u>*Théorème 1*</u> :

a) Les $\Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n}(z)$ *sont constants en* z. *On pose :*

$$\Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n} \equiv \Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n}(z)$$

b) Pour tout j *de* $\mathbb{Z}$ *et tout* n *de* $\mathbb{Z}$ *on a :*

$$\Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n} \equiv 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon(-1)^j n \leqslant 0 .$$

<u>*Démonstration*</u> : *Voir en fin de paragraphe.*

<u>*Définition 2*</u> : $\left(f \in \mathcal{G}_{h} \ ; \ \text{valit}\, f = p \right)$

a) Pour tous k *et* n *de* $\mathbb{Z}$ *on pose :*

si $n \geqslant 0$
$$\begin{cases} \Theta_f(1,k,n) = \Theta^{f}_{2k,2k+1;n} \\ \Theta_f(-1,k,n) = \Theta^{f}_{2k+1,2k;n} \end{cases}$$

si $n \leqslant 0$
$$\begin{cases} \Theta_f(1,k,n) = \Theta^{f}_{2k,2k-1;n} \\ \Theta_f(-1,k,n) = \Theta^{f}_{2k-1,2k;n} \end{cases}$$

b) On désigne par ρ *résidu itératif de* f *et pour tous* l, k_0 *et* n *de* $\mathbb{Z}$ *on pose :* (*pour* $\varepsilon = \pm 1$)

$$\dot{\Pi}_f(\varepsilon, l, n; k_0) = \frac{1}{p} \sum_{k=k_0}^{k=k_0+p-1} \Theta_f(\varepsilon,k,n)\, e^{-4\pi^2 n \rho \frac{k}{p} - 2\pi i \frac{kl}{p}}$$

(**) Si $\mathcal{U}_{j,j+\varepsilon}(f)$ n'est pas connexe, on se limite bien sûr à la composante connexe contigüe à l'origine.

Théorème 2 :

a) $\dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n;k_0)$ est en fait indépendant de k_0, et périodique de période p $(=\text{valit } g)$ en ℓ. On pose

$$\dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n) \equiv \dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n;k_0)$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe un réel minimal $t_k \geq 0$ et $< +\infty$ tel que la série :

$$w + \sum_{n\geq 0\,(\text{resp. } n\leq 0)} \Theta_g(\varepsilon,k,n)\, e^{2\pi i n w}$$

converge uniformément dans tout demi-plan $\operatorname{Im} w \geq t > t_k$ (resp. dans tout demi plan $\operatorname{Im} w \leq -t < -t_k$).

Pour tout w tel que $|\operatorname{Im} w| > t_k$, la somme de la série correspondante sera notée $\Omega_g(\varepsilon,k,w)$.

Définition 3 : Pour $\varepsilon = \pm 1$ on pose :

a) $\Pi_g(\varepsilon,k,w) = \Omega_g(\varepsilon,k,w+(2\pi i \rho k/p)) - (w+(2\pi i\rho k/p))$

(où : $p = \text{valit } g$; $\rho = \text{résit } g$) pour tous les w tels que cela ait un sens.

b) $\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n) = \dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)\,\overline{\dot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,-n)}$ $\quad(\forall \ell \text{ et } n \in \mathbb{Z})$

c) $\dddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n) = \ddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)\,\left(\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,n)\right)$ $\quad(\forall \ell \text{ et } n \in \mathbb{Z})$

Les principales propriétés des éléments $\Omega, \Pi, \dot{\Pi}, \ddot{\Pi}$ et $\dddot{\Pi}$ introduits ci-dessus sont données dans les deux théorèmes qui suivent :

Théorème 3 :

a) Pour tout k de $\mathbb{Z}$, les applications :

$w \to \Omega(1,k,w)$ et $w \to \Omega(-1,k,w)$ sont

réciproques (là où leur composition a un sens).

b) Pour $\varepsilon = \pm 1$ *, la fonction* $\Pi_g(\varepsilon, k, w)$ *est doublement périodique, à savoir de période* p *en* k *et de période* 1 *en* w *(partout où cela a un sens). La périodicité en* p *et en* w *permet d'étendre la définition de* $\Pi_g(\varepsilon, k, w)$ *à un domaine du type* $\{k \in \mathbb{Z} \,;\, |\Im m\, w| > K_g\}$.

c) Les $\dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n)$ *sont les coefficients de Fourrier de* $\Pi_g(\varepsilon, k, w)$ *par rapport aux deux dernières variables.*

Autrement dit :

$$\Pi_g(\varepsilon, k, w) = \sum_\ell \sum_n \dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n)\, e^{2\pi i\left(\frac{k\ell}{p} + nw\right)}$$

où ℓ *parcourt les valeurs entières de* $[\ell_0, \ell_0 + p[$ $(\forall \ell_0)$ et où n *parcourt* $\mathbb{N}$ *(resp.* $-\mathbb{N}$*) si* $\Im m\, w > 0$ *(resp.* $\Im m < 0$*)*

<u>Théorème 4 : Propriétés d'invariance de</u> $\Pi, \dot{\Pi}, \ddot{\Pi}, \dddot{\Pi}$.

g *désigne ici l'élément générique de* $\mathcal{G}_k$ *, et* τ *et* σ *désignent deux automorphismes de* $\mathcal{G}_k$ *, de la forme :*

$\tau = {}^c h$ *et* $\sigma = {}^c h . C$ $\left(h \in \mathcal{H}_k \,;\, h^{\circ(-1)} \text{ inverse de } h\right)$.

Autrement dit :

$$\begin{cases} \tau : \; g \to \tau g = h^{\circ(-1)} \circ g \circ h \\ \sigma : \; g \longrightarrow \sigma g = h^{\circ(-1)} \circ \bar{g} \circ h \end{cases}$$

(τ*: automorphisme primaire*)

Alors il existe 2 entiers : k_1 *et* k_2 *, et 4 complexes* C_1, C_2, w_1 *et* w_2 *, ne dépendant que de* g *et de* τ *(ou* σ*) et tels que*

$$(\alpha) \quad \Pi_{\tau g}(\varepsilon, k, w) = C_1 + \Pi_g(\varepsilon, k_1 + k, w_1 + w)$$

$$(\alpha') \quad \Pi_{\sigma g}(\varepsilon, k, w) = C_2 + \overline{\left(\Pi_g(\varepsilon, k_2 - k, \overline{w_2 + w})\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon = \pm 1 \\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ \forall w \end{array}\right.$$

$$(\beta) \quad \dot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon, \ell, n) = \dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n)\, \exp\left\{2\pi i\left(\frac{k_1 \ell}{p} + w_1 n\right)\right\}$$

$$(\beta') \quad \dot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon, \ell, n) = \overline{\left(\dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, -n)\right)}\, \exp\left\{2\pi i\left(-\frac{k_1 \ell}{p} + w_2 n\right)\right\}$$

$$(\gamma)\quad \ddot{\Pi}_{\tau f}(\varepsilon,\ell,n) = \overline{\ddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)}$$

$$(\gamma')\quad \ddot{\Pi}_{\sigma f}(\varepsilon,\ell,n) = \overline{(\ddot{\Pi}_f(\varepsilon,-\ell,n))}$$

$$(\delta)\quad \dddot{\Pi}_{\sigma f}(\varepsilon,\ell,n) = \dddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)$$

$$(\delta')\quad \dddot{\Pi}_{\sigma f}(\varepsilon,\ell,n) = \dddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)$$

Autrement dit, si on désigne par ${}^c\mathcal{H}_k$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}_k$ *formé des automorphismes du type de* τ *(c'est-à-dire de la forme :* ${}^c h$ *, avec* $h \in \mathcal{H}_k$*) on peut affirmer que les applications :* $f \to \ddot{\Pi}_f$ *et a fortiori :* $f \to \dddot{\Pi}_f$ *sont des* ${}^c\mathcal{H}$ *— invariants de* $\mathcal{G}_k$ *, et que l'application :* $f \to \dddot{\Pi}_f$ *est un invariant de* $\mathcal{G}_k$ *(ainsi que* $|\ddot{\Pi}_f(\varepsilon,0,n)|$ *).*

N. B. *Les constantes* $C_1, C_2, w_1, w_2, k_1, k_2$ *sont d'un calcul aisé, et s'expriment en fonction des* p *premiers coéfficients non nuls de* f *et de* h *. Ainsi, par exemple :*

$$w_1 = \operatorname*{Res}_{z=0}\left\{ z^{-1}\int_z^{h(z)} [(1+p)f(\zeta)+(1-p)\zeta][2\zeta(f(\zeta)-\zeta)]^{-1}d\zeta \right\}$$

Démonstration des théorèmes 1, 2, 3 et 4 :

1°) Soient j *et* j' *deux entiers relatifs tels que* $|j-j'| = 1.$

Si $\inf(j,j')$ *est pair (resp. impair) on vérifie que la relation* $\Omega^f_{j,j'}(w) = f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w)$ *définit une fonction holomorphe dans un demi-plan* $\operatorname{Im} w > t$ *(resp.* $\operatorname{Im} w < -t$*) et il est clair que les applications :* $w \to \Omega^f_{j,j'}(w)$ *et* $w \to \Omega^f_{j',j}(w)$ *sont réciproques l'une de l'autre.*

2°) Les itérateurs sectoriels f^{*j} *vérifient la relation fonctionnelle :* $f^{*j} \circ f(z) = 1 + f^{*j}(z)$ *et par suite les fonctions* *réciproques* ${}^{j*}f$ *vérifient la relation fonctionnelle :*

$$f \circ {}^{j*}f\,(w) = {}^{j*}f\,(w+1)$$

Par suite

$$\Omega^f_{j,j'}(w+1) = f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w+1) = f^{*j} \circ f \circ {}^{j'*}f(w) = 1 + f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w)$$
$$= 1 + \Omega^f_{j,j'}(w)$$

La fonction $\Omega^f_{j,j'}(w) - w$ *est donc périodique en* w *de période 1, et puisque* f^{*j} *et* $f^{*j'}$ *admettent sur* $\mathcal{U}_{j,j'}(f)$ *deux développements asymptotiques identiques, il est clair que*

$$\Omega^f_{j,j'}(w) - w \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \operatorname{Im} w \longrightarrow +\infty \ (\text{resp.} \to -\infty)$$

Par suite la fonction périodique $\Omega^f_{j,j'}(w) - w$ *est de la forme :*

$$\Omega^f_{j,j'}(w) - w = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A^f_{j,j';n}\, e^{2\pi i n w}$$

avec

(2)
$$A^f_{j,j';n} = \int_{w_0}^{1+w_0} e^{-2\pi i n w}\, f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w)\, dw$$
$$= \int_z^{f(z)} \left(f^{*j}(\zeta) - f^{*j'}(\zeta)\right) e^{-2\pi i n f^{*j}(\zeta)}\, f^{-1}_{*j'}(\zeta)\, d\zeta$$

et aussi (3) $\qquad A_{j,j';n} \equiv 0 \qquad \text{si } (-1)^{\inf(j,j')}\, n \leqslant 0$

ou, ce qui revient au même, si $(j'-j)(-1)^j\, n \leqslant 0.$

3°) Par définition des itérateurs sectoriels f^{*j} *et du résidu itératif* ρ *de* f *, on a : (4)* $f^{*j+2p}(z) = 2\pi i\rho + f^{*j}(z)$

et par suite : (5) ${}^{j+2p*}f(w) = {}^{j*}f(w - 2\pi i\rho)$

Portant (4) et (5) dans la relation définissant $\Omega^f_{j,j'}(w)$ *on trouve :*

(6) $$\Omega^f_{j+2p,\,j'+2p}(w) = 2\pi i\rho + \Omega^f_{j,j'}(w - 2\pi i\rho)$$

Cela étant

*) posons $\Theta^{g}_{j,j';n} = A^{g}_{j,j';n} \quad (|j-j'|=1)$

*) définissons les $\Theta_g(\varepsilon,k,n)$ à partir des $\Theta^{g}_{j,j';n}$ comme dans la définition 2, a.

*) définissons (pour $k\in\mathbb{Z}$; $\varepsilon=\pm 1$) les $B_g(\varepsilon,k,w)$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} B_g(1,k,w) = \Omega^{g}_{2k,2k+1}(w) & \text{si } \operatorname{Im} w \text{ est assez grand} \\ B_g(1,k,w) = \Omega^{g}_{2k,2k-1}(w) & \text{si } -\operatorname{Im} w \text{ est assez grand} \\ B_g(-1,k,w) = \Omega^{g}_{2k+1,2k}(w) & \text{si } \operatorname{Im} w \text{ est assez grand} \\ B_g(-1,k,w) = \Omega^{g}_{2k-1,2k}(w) & \text{si } -\operatorname{Im} w \text{ est assez grand.} \end{cases}$$

*) enfin, définissons $C_g(\varepsilon,k,w)$ (pour $\varepsilon=\pm 1$; $k\in\mathbb{Z}$) par :

$$C_g(\varepsilon,k,w) = B_g\left(\varepsilon,k,w+2\pi i\rho\frac{k}{p}\right)-\left(w+2\pi i\rho\frac{k}{p}\right)$$

Alors, compte tenu des propriétés (2) et (3) des $A^{g}_{j,j';n}$ notre nouvelle définition des $\Theta^{g}_{j,j';n}$, et par suite celle des $\Theta_g(\varepsilon,k,n)$, coïncident bien avec les anciennes définitions (2) et (3).

De plus, compte tenu de la périodicité en w de $\Omega^{g}_{j,j'}(w)-w$ d'une part, et de la relation (6) d'autre part, on trouve : (7)

$$\begin{cases} B_g(\varepsilon,k,w+1) = 1 + B_g(\varepsilon,k,w) \\ B_g(\varepsilon,k+p,w) = 2\pi i\rho + B_g(\varepsilon,k,w-2\pi i\rho) \end{cases}$$

et par suite : (7 bis) $\begin{cases} C_g(\varepsilon,k,w) \text{ est doublement périodique} \\ \text{de période } p \text{ en } k \text{ et de période } 1 \text{ en } w \end{cases}$

(7 bis) nous autorise à poser :

$$C_g(\varepsilon,k,w) = \sum_{\ell}\sum_{n} \dot{C}_g(\varepsilon,\ell,n)\exp\left\{2\pi i\left(\frac{k\ell}{p}+nw\right)\right\} \tag{8}$$

(où ℓ parcourt $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ et où n parcourt $\pm\mathbb{N}$ selon le signe de $\Im m\, w$)

Mais, par définition des $B_g(\varepsilon, k, w)$ et $\Theta_g(\varepsilon, k, n)$ on a :

$$(9) \qquad B_g(\varepsilon, k, w) = \sum_{n \geq 0\,(\text{resp} \leq 0)} \Theta_g(\varepsilon, k, n)\, \exp(2\pi i n w)$$

Tenant compte de (8), (9) et de la relation définissant C_g à partir de B_g, on trouve :

$$(10) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{\ell=p} \dot{C}_g(\varepsilon, k, n)\, e^{2\pi i \frac{k\ell}{p}} = \Theta_g(\varepsilon, k, n)\, e^{-4\pi^2 n \rho \frac{k}{p}}$$

L'inversion de la relation (10) fournit :

$$(11) \qquad \dot{C}_g(\varepsilon, \ell, n) = \frac{1}{p} \sum_{k=k_0}^{k=k_0+p+1} \Theta_g(\varepsilon, k, n)\, \exp\left\{-4\pi^2 n \rho \frac{k}{p} - 2\pi i \frac{k\ell}{p}\right\}$$

Comparant (11) à la relation de définition des $\dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n; k_0)$ (voir déf. 2, b) on voit que :

$$(12) \qquad \dot{C}_g(\varepsilon, \ell, n) \equiv \dot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n; k_0) \quad \forall k_0$$

Comme d'autre part les $\dot{C}_g(\varepsilon, \ell, n)$ sont les coéfficients de Fourrier de la fonction doublement périodique $C_g(\varepsilon, k, w)$, il est clair que si l'on pose :

$\Pi_g(\varepsilon, k, w) = C_g(\varepsilon, k, w)$, cette définition de Π_g est équivalente à celle qui a été donnée à la définition 3, a) et qu'en outre Π_g et $\dot{\Pi}_g$ vérifient bien les énoncés des théorèmes 2 et 3.

Il ne reste plus maintenant qu'à démontrer le théorème 4, et pour cela, à étudier les propriétés d'invariance de Π_g et $\dot{\Pi}_g$.

τ et σ étant deux automorphismes de $\mathcal{G}_k$ définis comme dans l'énoncé du théorème 4 (i.e. respectivement primaire et non-primaire), et compte tenu de A, III, § 3, théorème 9, d), on voit qu'il doit exister deux constantes complexes C_1 et C_2, et deux constantes entières relatives j_1 et j_2 telles que :

$$\left\{\begin{array}{lll} (13) & (\tau f)^{*j}(z) = C_1 + f^{*(j_1+j)} \circ h(z) \; ; & \forall j, \forall z \in \mathcal{U}_j(\tau f) \\ (14) & (\sigma f)^{*j}(z) = C_2 + \overline{\left(f^{*(j_2-j)}\right)} \circ h(z) \; ; & \forall j, \forall z \in \mathcal{U}_j(\sigma f) \end{array}\right.$$

Passant aux fonctions ${}^{j*}f$ (réciproques des itérateurs sectoriels) et faisant $j = j'$, on tire de (13) et (14) :

$$\left\{\begin{array}{ll} (13\text{ bis}) & {}^{j'*}(\tau f)(w) = h^{\circ(-1)} \circ {}^{(j_1+j')*}f(w - C_1) \\ (14\text{ bis}) & {}^{j'*}(\sigma f)(w) = h^{\circ(-1)} \circ \overline{\left({}^{(j_2-j')*}f(\overline{w - C_2})\right)} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{Z} \\ \text{et } \forall w \text{ tel que} \\ \operatorname{Im} w \ (\text{resp} -\operatorname{Im} w) \\ \text{soit assez grand.} \end{array}\right.$$

Compte tenu des 4 relations ci-dessus, et se reportant à la définition de $\Omega^f_{j,j'}(w)$ $\left(\text{i.e. } \Omega^f_{j,j'}(w) = f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w) \text{ si } |j'-j| = 1\right)$ on peut déterminer l'action des antomorphismes τ et σ sur les Ω^f ; d'une façon précise, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lll} (13\text{ ter}) & \Omega^{\tau f}_{j,j'}(w) = C_1 + \Omega^f_{j_1+j,\, j_1+j'}(w - C_1) \\ (14\text{ ter}) & \Omega^{\sigma f}_{j,j'}(w) = C_2 + \overline{\left(\Omega^f_{j_2-j,\, j_2-j'}(\overline{w - C_2})\right)} \end{array}\right.$$

A partir de là, et au moyen des relations définissant $B_f(\varepsilon, k, w)$ à partir des $\Omega^f_{j,j'}(w)$, puis $C_f(\varepsilon, k, w)$ à partir de $B_f(\varepsilon, k, w)$, et utilisant enfin l'identité des Π_f et des C_f, on aboutit facilement aux relations (α) et (α') du théorème 4.

Comme d'autre part les $\dot{\Pi}_g$ sont les coefficients de Fourrier des Π_g (par rapport aux deux dernières variables k et w) les relations (β) et (β') du même théorème 4 résultent aussitôt de (α) et (α').

Enfin, se reportant aux définitions des $\ddot{\Pi}_g$ et $\dddot{\Pi}_g$ (déf. 3, b-c) on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
\ddot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,\ell,n) &= \dot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,\ell,n)\,\dot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,-\ell,-n) \\
&= \dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)\,e^{2\pi i\left(\frac{k_1\ell}{\mu}+\omega_1 n\right)}\,\dot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,-n)\,e^{-2\pi i\left(\frac{k_1\ell}{\mu}+\omega_1 n\right)} \\
&= \ddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,\ell,n) &= \dot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,\ell,n)\,\dot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,-\ell,-n) \\
&= \overline{\left(\dot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,-n)\right)}\,e^{2\pi i\left(-\frac{k_2\ell}{\mu}+\omega_2 n\right)}\,\overline{\left(\dot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,n)\right)}\,e^{-2\pi i\left(-\frac{k_1\ell}{\mu}+\omega_2 n\right)} \\
&= \overline{\left(\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,n)\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dddot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,\ell,n) &= \ddot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,\ell,n)\,\overline{\left(\ddot{\Pi}_{\tau g}(\varepsilon,-\ell,n)\right)} \\
&= \ddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)\,\overline{\left(\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,n)\right)} \\
&= \dddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dddot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,\ell,n) &= \ddot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,\ell,n)\,\overline{\left(\ddot{\Pi}_{\sigma g}(\varepsilon,-\ell,n)\right)} \\
&= \overline{\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,-\ell,n)}\,\overline{\overline{\left(\ddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)\right)}} \\
&= \dddot{\Pi}_g(\varepsilon,\ell,n)
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'exactitude des relations (γ), (γ'), (δ) et (δ') du théorème 4 et achève la démonstration des résultats de ce paragraphe.

§ 2 : LES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$ (SUITE) ; SYSTEMES COMPLETS ET SYSTEMES LIBRES.

On désigne toujours par ${}^c\mathcal{K}_k$ *les groupe des automorphismes primaires de* $\mathcal{G}_k$ *, c'est-à-dire le sous-groupe de Aut* $\mathcal{G}$ *formé des* τ *de la forme* ${}^c h$ *, avec* $h \in \mathcal{K}_k$ *et* ${}^c h$ *défini par :* $f \longrightarrow {}^c h . f = h^{\circ(-1)} \circ f \circ h$ *. On dira aussi que le changement de variable :* $z \to h(z)$ *transmute la transformation* $z \longrightarrow f(z)$ *en la transformation :* $z \longrightarrow ({}^c h . f)(z)$

Nous allons, dans le théorème qui suit, donner des systèmes complets et libres d'invariants et de ${}^c\mathcal{K}_k$*-invariants de* $\mathcal{G}_k$ *C'est là un des principaux résultats de la présente théorie. Cela apporte, notamment, une réponse définitive à l'important problème suivant (dont nous croyons qu'il est resté ouvert jusqu'à ce jour) : étant donné deux fonctions* f *et* g *, holomorphes en* 0 *et telles que* $f(0) = g(0) = 0$; $f'(0) = g'(0) = 1$*, quand existe-t-il une* h *, holomorphe en* 0 *, et telle que :*

$$h(0) = 0 \ ; \ h'(0) \neq 1 \quad ; \quad h \circ f = g \circ h \ ?$$

On verra que ce n'est "presque jamais" le cas ; plus précisément, que c'est le cas si et seulement si un certain ensemble dénombrable de scalaires attachés canoniquement à f *coïncide exactement avec l'ensemble homologue de scalaires attachés à* g *.*

D'une façon précise, et avec les notations du paragraphe précédent, on peut énoncer :

Théorème 5 :

a) le système $\{\text{valit}\, f ; \text{résit}\, f ; \Pi_f(1, \dots, \dots)\}$ *et le système* $\{\text{valit}\, f ; \text{résit}\, f ; \Pi_f(-1, \dots, \dots)\}$ *sont* chacun des systèmes complets et libres de ${}^c\mathcal{H}_k$ -invariants de $\mathcal{G}_k$, à condition de regarder la fonction $\Pi_f(\varepsilon, k, \omega)$ (qui est bipériodique : en k , et en ω) comme définie à deux translations près : sur k , et sur ω .

b) Pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, le système

$$\{ \text{valit } f \ ; \text{ résit } f \ ; \ \ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n) \ ; \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ ; n \in \mathbb{Z} \}$$

et le système

$$\{ \text{valit } f \ ; \mathrm{Re}(\text{résit } f) \ ; |\mathrm{Im}(\text{résit } f)| \ ; \dddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n) ; \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} ; n \in \mathbb{Z} \}$$

est, respectivement, un système de ${}^c\mathcal{H}_k$ -invariants scalaires de $\mathcal{G}_k$, ou d'invariants scalaires de $\mathcal{G}_k$.

c) Pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, le système

$$\{ \text{valit } f \ ; \text{ résit } f \ ; \ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n | q) = (\dot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n))^{-q} \dot{\Pi}_f(\varepsilon, q\ell, qn)$$

$$\text{avec } \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ ; n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \}$$

est un système <u>complet</u> (mais non libre) de ${}^c\mathcal{H}_k$-invariants de $\mathcal{G}_k$.

d) Etant donné deux éléments f et g de $\mathcal{G}_k$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction h , holomorphe au voisinage de l'origine et telle que :

$$h(0) = 0 \ ; \ h'(0) \neq 0 \quad ; \quad h \circ f = g \circ h$$

est qu'il existe deux constantes $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\omega_1 \in \mathbb{C}$ telles que soit vérifiée l'une des 4 conditions équivalentes suivantes :

(α) pour $\varepsilon = +1$ on a :

valit $f =$ valit g ; résit $f =$ résit g ; $\Pi_f(\varepsilon, k, \omega) - \Pi_g(\varepsilon, k_1 + k, \omega_1 + \omega) =$ Cste

(β) même condition que ci-dessus pour $\varepsilon = -1$

(γ) *pour* $\varepsilon = +1$ *on a* :
valit f = *valit* g ; *résit* f = *résit* g ; $\dot{\Pi}_f(\varepsilon,l,n) = \dot{\Pi}_g(\varepsilon,l,n)\, e^{2\pi i\left(\frac{k_1 l}{p} + w_1 n\right)}$ $\forall l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,;\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(δ) *même condition que ci-dessus pour* $\varepsilon = -1$.

e) Une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments f *et* g *de* $\mathcal{G}_k$ *soient conjugués (par rapport à un automorphisme de* $\mathcal{G}_k$ *) est que soit vérifiée soit l'une des 4 conditions équivalentes du point d), soit l'une des 4 conditions ci-dessous (pour un certain entier* k_2 *et un certain complexe* w_2 *)* :

(α') *pour* $\varepsilon = +1$ *on a* :
valit f = *valit* g ; *résit* $f = \overline{(\text{résit } g)}$; $\Pi_f(\varepsilon,k,w) - \overline{\Pi_g(\varepsilon, k_2 - k, \overline{w_2 - w})} = \text{Cste}$

(β') *même condition que ci-dessus pour* $\varepsilon = -1$

(γ') *pour* $\varepsilon = +1$ *on a* :
valit f = *valit* g ; *résit* f = (*résit* g) ; $\dot{\Pi}_f(\varepsilon,l,n) = \dot{\Pi}_g(\varepsilon,-l,n)\, e^{2\pi i\left(-\frac{k_2 l}{p} + w_2 n\right)}$ $\forall l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *et* $\forall n \in \mathbb{Z}$

(δ') *même condition que ci-dessus pour* $\varepsilon = -1$.

<u>Remarque</u> : En se reportant à la définition 1, (B, chap I, § 1) on voit que la liberté des systèmes du théorème 5.a ne préjuge en rien de la liberté des systèmes du théorème 5. b, et ceci bien que les premiers puissent être exactement reconstitués à partir des seconds. En fait, la question intéressante et délicate de la complétude et de la liberté des systèmes du théorème 5. b ne sera pas abordée ici.

Démonstration du théorème 5 :

On peut aisément ramener la démonstration du théorème 5 tout entier à la démonstration de la nécessité et suffisance de la condition (α) *du point d, et de la condition* « (α) *ou* (α') » *du point e. Or la nécessité de chacune de ces conditions résulte aussitôt du théorème 4 (A, II, § 1).*

Il ne reste donc plus qu'à établir leur suffisance, et, pour simplifier, nous ne l'établirons que dans le cas de la condition (α) *du point d (le cas de la condition* « (α) *ou* (α') » *du point e se traitant d'une manière analogue).*

Il s'agit donc de prouver $(\mathcal{C}_1)$ *, avec :*

$$(\mathcal{C}_1)\left\{\begin{array}{l} \text{« } f \text{ et } g \in \mathcal{G}_k \text{ ; valit } f = \text{valit } g \text{ ; résit } f = \text{résit } g \text{ ; il existe} \\ \quad k_1 \text{ et } w_1 \text{ tels que } \Pi_f(1,k,w) - \Pi_g(1,k_1+k,w_1+w) \equiv \text{Cste »} \\ \Longrightarrow \text{« il existe } h \text{ dans } \mathcal{K}_k \text{ telle que } h\circ f = g\circ h \text{ »} \end{array}\right.$$

Commençons par montrer qu'il suffit en fait de prouver un théorème plus simple, soit $(\mathcal{C}_2)$ *avec :*

$$(\mathcal{C}_2)\left\{\begin{array}{l} \text{« } f \text{ et } g \in \mathcal{G}_k \text{ ; valit } f = \text{valit } g = p \text{ ; résit } f = \text{résit } g = \rho \\ \quad \theta_j(f) = \theta_j(g) \quad \forall j \quad \Big|\text{(identité des rayons fondamentaux de } f \text{ et } g\text{)} \\ \quad \Pi_f(1,k,w) \equiv \Pi_g(1,k,w) \text{ »} \\ \Longrightarrow \text{« il existe } h \text{ dans } \mathcal{K}_k \text{ telle que } h\circ f = g\circ f \text{ »} \end{array}\right.$$

Soient en effet f *et* g *vérifiant les hypothèses de* $(\mathcal{C}_1)$*. Puisque valit* f = *valit* g *et résit* f = *résit* g *, en passant aux images* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *de* f *et* g *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et en appliquant le théorème 1 (B, I, § 1) on voit qu'il existe* $\tilde{h}$ *dans* $\tilde{\mathcal{K}}$ *tel que :*

$\tilde{f} = (\tilde{h})^{\circ(-1)} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h}$. $\tilde{h}$ *appartient en fait* à $\tilde{\mathcal{K}}\{\Gamma_n \equiv n\}$ *mais pas nécessairement à* $\tilde{\mathcal{K}}\{\Delta_n \equiv 1\}$ *(Voir théorème 6 ci-après) si bien que* $\tilde{h}$ *n'est pas nécessairement l'image d'un élément* h *de* $\mathcal{K}_h$. *Toutefois, si on désigne par* $\tilde{\tilde{h}}(z)$ *le polynôme de degré* $(p+2)$ *qui est égal à la série formelle* $\tilde{h}(z)$ *à* $\tilde{o}(z^{p+2})$ *près,* $\tilde{\tilde{h}}$ *est évidemment l'image d'un élément* $\bar{h}$ *de* $\mathcal{K}_h$, *et si l'on pose*

$$\bar{g} = \bar{h}^{\circ(-1)} \circ g \circ \bar{h}$$

on vérifie aisément que l'on a :

(i) $\quad \bar{g} \in \mathcal{G}_h$

(ii) $\quad f(z) - \bar{g}(z) = o(z^{2p+1})$

(iii) $\quad \theta_j(f) = \theta_j(\bar{g})$ *(Voir la définition des rayons fondamentaux* $\theta_j(f)$ *(en A, III, § 3, déf. 6.a)).*

(iiii) $\quad f^{*j}(z) - \bar{g}^{*j}(z) = O(z)$ *quand* $z \to 0$ *sur* $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_j(\bar{g}) \neq \emptyset$

Mais d'après le théorème 4 (B, II, § 1) il existe deux constantes w_0 *et* k_0 *, telles que :*

$$\Pi_g(1, k, w) - \Pi_{\bar{g}}(1, k_0 + k, w_0 + w) \equiv C^{ste}. \tag{15}$$

ce qui implique, en tenant compte des hypothèses de $(\mathcal{C}_1)$ *:*

$$\Pi_f(1, k, w) - \Pi_{\bar{g}}(1, k_1 + k_0 + k, w_1 + w_0 + w) \equiv C''^{ste} \tag{16}$$

Or, en vertu de (iiii), et compte tenu de la manière dont Π_f *et* $\Pi_{\bar{g}}$ *sont définis à partir des itérateurs* f^{*j} et $\bar{g}^{*j}$ *la relation (16) n'est possible que pour*

$$\begin{cases} k_1 + k_0 = 0 \\ w_1 + w_0 = 0 \\ C''^{ste} = 0 \end{cases}$$

Comme enfin la conjugabilité de deux éléments de $\mathcal{G}_h$ *est une relation transitive, on est bien ramené à prouver* $(\mathcal{C}_2)$.

Soient donc maintenant deux éléments f et g de $\mathcal{G}_h$ vérifiant les hypothèses de $(\mathcal{C}_2)$.

Puisque les $2p$ rayons fondamentaux de f et g coïncident (i.e. $\theta_j(f) = \theta_j(g) = \theta_j$), pour tout ε fixé >0 et $<\pi/2p$, on peut trouver $\lambda(\varepsilon)>0$ tel que

$$\begin{cases} V_j = V(\theta_{j-1}+\varepsilon\,,\ \theta_{j+1}-\varepsilon\,;\ \lambda(\varepsilon)) \subset \mathcal{U}_j(f)\cap\mathcal{U}_j(g) \\ V_{j,j+1} = V(\theta_j+\varepsilon, \theta_{j+1}-\varepsilon;\ \lambda(\varepsilon)) \subset \mathcal{U}_j(f)\cap\mathcal{U}_{j+1}(f)\cap\mathcal{U}_j(g)\cap\mathcal{U}_{j+1}(g) \end{cases}$$

Par suite, pour $j = 1, 2, \ldots 2p$ les relations

$$(17) \qquad h^{((j))} = {}^{j*}g \circ f^{*j}$$

définissent une fonction $h^{((j))}$ holomorphe sur V_j (au besoin on réduit le paramètre $\lambda(\varepsilon)$ intervenant dans la définition de V_j).

Or, sur V_j :
$$\begin{cases} f(z) = {}^{j*}f\,(1 + f^{*j}(z)) \\ g(z) = {}^{j*}g\,(1 + g^{*j}(z)) \end{cases}$$

Donc, toujours sur V_j :

$$(18) \qquad h^{((j))}\circ f(z) = g\circ h^{((j))}(z) = {}^{j*}g\,(1 + f^{*j}(z))$$

Or, sur $V_{j,j+1}$, on peut écrire :

$$(19) \qquad h^{((j))}(z) = {}^{j*}g \circ f^{*j}(z) = {}^{j+1*}g\circ g^{*j+1}\circ {}^{j*}g\circ f^{*j}\circ {}^{j+1*}f\circ f^{*j+1}(z)$$

Soit encore :

$$(19\ bis)\begin{cases} h^{((j))}(z) = {}^{j*}g \circ \Omega^g_{j+1,j} \circ \Omega^f_{j,j+1} \circ f^{*j+1}(z) \text{ sur } V_{j,j+1} \\ \text{avec } \Omega^g_{j+1,j} = g^{*j+1}\circ {}^{j*}g\ ;\ \Omega^f_{j,j+1} = f^{*j}\circ {}^{j+1*}f \end{cases}$$

Mais compte tenu de la manière dont Π^f et Π^g sont définis à partir des $\Omega^f_{j,j'}$ et $\Omega^g_{j,j'}$, et eu égard à $\{\text{valit } f = \text{valit } g\ ;\ \text{résit } f = \text{résit } g\}$, il est clair que l'hypothèse $\{\Pi^f = \Pi^g\}$ implique $\{\Omega^f_{j,j'} = \Omega^g_{j,j'}\}$ et par suite aussi : $\left\{ \Omega^{g}_{j+1,j} \circ \Omega^{f}_{j,j+1} = \text{identité} \right\}$.

Portant ce dernier résultat dans (19 bis) on trouve :

$$(20) \qquad h^{((j))}(z) \equiv h^{((j+1))}(z) \quad \text{sur } V_{j,j+1}$$

Ceci étant vrai pour tout j, on voit qu'il existe une fonction h telle que

$$\begin{cases} (i) & h \text{ est définie holomorphe sur } V = \bigcup_{j=1}^{2k} \{ V_{j,j+1} \} \\ (ii) & h(z) \equiv h^{((j))}(z) \quad \text{sur } V_j \cap V \\ (iii) & h \circ f(z) = g \circ h(z) \quad \forall z \in V \end{cases}$$

Or les propriétés asymptotiques de f^{*j} et g^{*j} font que $h^{((j))}(z)$, et par suite $h(z)$, tend vers 0 quand $z \to 0$ et que $\frac{d}{dz} h^{((j))}(z)$, et par suite $h'(z)$, tend vers $\text{Cste} \neq 0$ quand $z \to 0$

Comme V est un voisinage de 0, privé de 0, h se prolonge par continuité en une fonction holomorphe en 0, et telle que :

$$h(0) = 0 \; ; \; h'(0) \neq 0 \; ; \; h \circ f = g \circ h$$

ce qui achève de démontrer $(\mathcal{C}_2)$, et du même coup le théorème 5.

<u>Théorème 6</u> : D'après ce qui précède, pour deux éléments f et g de $\mathcal{G}_k$, les hypothèses

$\{ \text{valit } f = \text{valit } g \; ; \; \text{résit } f = \text{résit } g \}$

n'assurent aucunement l'existence d'un h de $\mathcal{H}_k$ conjuguant f et g ; toutefois, d'après le théorème 1, (B, I, § 2), elles assurent l'existence de séries formelles $\tilde{h}$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ telles que :

(21) $\tilde{h} \circ \tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{h}$ et l'on peut énoncer :

Les $\tilde{h}$ solutions de (21) dépendent d'un unique paramètre complexe et appartiennent en fait toutes à $\tilde{\mathcal{H}}\{\Gamma_n \equiv n\}$ (Voir A, II).

<u>Démonstration succincte</u> :

$\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont éléments de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Delta_n \equiv 1\}$ et par suite, d'après (A, II, § 3), Théorème 3, $(\tilde{f})_*$ et $(\tilde{g})_*$ sont de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n \equiv n\}$, ainsi que les séries formelles :

$$(\tilde{f})^*(z) - \rho \log z \quad \text{et} \quad (\tilde{g})^*(z) - \rho \log z \, . \left(\rho = \operatorname{resit} f = \operatorname{resit} g\right).$$

Les solutions de (21) sont les $(\tilde{h}_u)$, de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{n\}$, caractérisés par (22) :

$$(\tilde{g})^* \circ (\tilde{h}_u) = u + (\tilde{f})^* \tag{22}$$

ce qui conduit facilement à l'énoncé ci-dessus.

§ 3 : AUTRES APPLICATIONS DES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$. CRITERES DE PLEINE ITERABILITE.

Définition 4 :

$\forall \varepsilon = \pm 1$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\Delta_f(\varepsilon, \ell, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n) = 0 \\ 1 & \text{si } \dot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n) \neq 0 \end{cases}$$

La relation (β) du théorème 4 montre que les Δ_f sont des ${}^c\mathcal{K}$-invariants (à la différence des $\dot{\Pi}_f$).

Cela étant, nous allons donner trois énoncés montrant comment on peut utiliser la théorie des invariants holomorphes à la résolution de divers problèmes sur $\mathcal{G}_k$. Les démonstrations faisant appel à des modes de raisonnements déjà employés, nous nous bornerons à quelques indications, en fin de paragraphe.

Théorème 7 : *(Critères de pleine itérabilité au moyen des invariants holomorphes).*

Pour qu'un élément f de $\mathcal{G}_k$ soit pleinement itérable (Voir A, III, § 1, déf. 1;d) il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des quatre conditions équivalentes suivantes :

(α) $\quad \Pi_f(1, k, w) \equiv 0$, $\forall k$, $\forall w$.

(β) $\quad \Pi_f(-1, k, w) \equiv 0$, $\forall k$, $\forall w$.

(γ) $\quad \Delta_f(1, \ell, n) \equiv 0$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(δ) $\quad \Delta_f(-1, \ell, n) \equiv 0$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 8 : (Critères d'itérabilité fractionnaire au moyen des invariants)

Si un élément f de $\mathcal{G}_k$ n'est pas pleinement itérable, alors le groupe W_f des ordres d'itérations admissibles de f (Voir en A, III, § 4 la définition exacte de W_f) est réel et discret ; plus précisément, il est de la forme $W_f = q_0^{-1}\mathbb{Z}$ où q_0 est l'entier naturel caractérisé par chacune des conditions suivantes, équivalentes :

(α) $u_0 = q_0^{-1}$ *est la plus petite période (en w) commune à tous les* $\Pi_f(\varepsilon, k, w)$ *pour* $\varepsilon = +1$ *et pour* $k = 1, 2, \ldots p$.

(β) *même énoncé avec* $\varepsilon = -1$.

(γ) *Pour* $\varepsilon = +1$, *on a :* $\Delta_f(\varepsilon, \ell, n) = 0 \;\forall n \neq 0 \pmod{q_0}$ et $\forall \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(δ) *même énoncé pour* $\varepsilon = -1$.

Théorème 9 : (critère de conjugabilité par rapport à une transformation de valuation itérative moindre).

Etant donné un élément f de $\mathcal{G}_k$, il existe un élément g de $\mathcal{G}_k$ tel que valit $g = p' < p =$ valit f et une fonction h, holomorphe en 0 et telle que

$$h(0) = 0 \;;\; h \circ f = g \circ h$$

si et seulement si p' divise p et si est vérifiée l'une des quatre conditions équivalentes suivantes :

(α) $\forall w$, $\Pi_f(\varepsilon, k, w)$ *est périodique en k de période p', pour* $\varepsilon = 1$.

(β) *même énoncé pour* $\varepsilon = -1$.

(γ) $\Delta_f(\varepsilon, \ell, n) \equiv 0$ *pour* $\varepsilon = 1$, $\forall \ell \neq 0 \pmod{p'' = p/p'}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(δ) *même énoncé avec* $\varepsilon = -1$.

Indications sur la démonstration des trois théorèmes précédents :

Les théorèmes 7 et 8 se démontrent à partir de la remarque suivante, facile à prouver : le groupe W_f *des ordres d'itération admissibles de* f $(f \in \mathcal{G}_k)$ *est identique au groupe des périodes* (*en* w) *de* $\Pi_f(\varepsilon, k, w)$ *, et ceci tant pour* $\varepsilon = +1$ *que pour* $\varepsilon = -1$

Quant au théorème 9, il repose sur la remarque suivante :

si on pose $h(z) = z^{p''}$ $(p'' \in \mathbb{N})$

la relation

$$h \circ f = g \circ h$$

associe sans ambiguité à tout élément g *de* $\mathcal{G}_k$ *de valuation itérative* p' *un élément unique* f *de* $\mathcal{G}_k$ *de valuation itérative* $p = p'p''$ *et les logarithmes itératifs de* f *et* g *sont encore liés par la relation habituelle* (*valable en principe pour des* h *de* $\mathcal{H}_k$) *à savoir :*

$$f_{*j} = g_{*j} \circ h \,/\, h' \quad (\forall j)$$

On passe au cas général du théorème 9 en composant le changement de variable : $z \longrightarrow h(z) = z^{p''}$ *avec un changement de variable du type :* $z \rightarrow h(z)$ *, avec* $h \in \mathcal{H}_k$ *.*

CHAPITRE III

LES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$ COMME FONCTIONS ENTIERES D'UNE INFINITE DE VARIABLES COMPLEXES.

§ 1 : GENERALITES

Ce chapitre est, avec le précédent, le plus important du présent travail. On y étudie les invariants purs de $\mathcal{G}_k$ comme fonctions de divers systèmes de paramètres définissant les éléments f de $\mathcal{G}_k$. Commençons par préciser ce que nous entendons par "dépendance analytique d'un élément $f = f_\Lambda$ de $\mathcal{G}_k$ par rapport aux paramètres Λ ".

Définition 1 :

a) On dit qu'une suite f_m d'éléments de $\mathcal{G}_k$ converge vers un élément f de $\mathcal{G}_k$ s'il existe deux voisinages $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que $\overline{\mathcal{V}'} \subset \mathcal{V}$, que chaque $f_m^{o\pm 1}$ soit définie holomorphe sur $\mathcal{V}$ et que $f_m^{o\pm 1}$ converge uniformément vers $f^{o\pm 1}$ sur $\mathcal{V}'$.

b) Soit f_Λ un élément de $\mathcal{G}_k$ dépendant analytiquement de r paramètres complexes : $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. On dit que f_Λ est analytique en Λ sur le domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^r$ si pour tout compact

K de $\mathcal{D}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que l'application $(z, \Lambda) \to \overset{0\pm1}{g_\Lambda}(z)$ soit définie et holomorphe sur le domaine $(\mathcal{V} \times \mathring{K})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.

c) On dit qu'un élément g_Λ de $\mathcal{G}_k$, dépendant d'une suite infinie de paramètres complexes : $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ est analytique en Λ si pour toute sous-suite finie Λ' de Λ (comportant n termes), g_Λ est analytique en Λ' (sur $\mathbb{C}^n$ tout entier).

<u>Théorème 1</u> :

a) Si g_Λ est un élément de $\mathcal{G}_k$ dépendant analytiquement de n paramètres complexes $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ variant dans un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^n$ et si en outre valit g_Λ reste constant quand Λ parcourt $\mathcal{D}$, alors chacun des ${}^c\mathcal{H}_k$-invariants scalaires $\ddot{\Pi}_{g_\Lambda}(\varepsilon, \ell, n)$ et chacun des invariants scalaires $\dddot{\Pi}_{g_\Lambda}(\varepsilon, \ell, n)$ est une fonction holomorphe de Λ sur le domaine $\mathcal{D}$.

b) Sous les hypothèses du point a, les fonctions $\Pi_{g_\Lambda}(\varepsilon, k, w)$ sont définies et holomorphes en (w, Λ) sur un domaine du type $\{(w, \Lambda) \; ; \Lambda \in \mathcal{D}, |\mathrm{Im}\, w| > y(\Lambda)\}$ où $y(\Lambda)$ est $\geqslant 0$, $< \infty$ et peut-être choisi continu en Λ.

c) Soit g_m une suite d'éléments de $\mathcal{G}_k$ qui convergent (dans $\mathcal{G}_k$) vers g. Si en outre valit g_m = cste = valit g, alors les $\ddot{\Pi}_{g_m}(\varepsilon, \ell, n)$ et $\dddot{\Pi}_{g_m}(\varepsilon, \ell, n)$ tendent respectivement vers $\ddot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n)$ et $\dddot{\Pi}_g(\varepsilon, \ell, n)$ quand $m \to \infty$.

d) Sous les hypothèses du point c, les fonctions $\Pi_{g_m}(\varepsilon, k, w)$ convergent uniformément vers les fonctions $\Pi_g(\varepsilon, k, w)$ sur deux demi-plans $|\mathrm{Im}\, w| > y$, pour un certain $y \geqslant 0$ et $< \infty$.

Corollaire du théorème 1 :

Soit f *un élément de* $\mathcal{G}_k$ *de valuation itérative égale à* p *et donc de la forme :* $f(z) = z + \sum_{n\geq p} a_n z^{n+1}$ $(a_p \neq 0)$
Alors, pour tout choix de (ε, ℓ, n) *les* ${}^{c}\mathcal{H}_k$*-invariants* $\ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ *et les invariants* $\dddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ *sont des fonctions holomorphes des variables* $(a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots)$ *sur le domaine* $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots$ *(avec* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$*). En particulier, pour une valeur fixée et non-nulle de* a_p *, les* $\ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ *et les* $\dddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ *sont des fonctions entières de l'infinité de variables complexes* $(a_{p+1}, a_{p+2}, \dots)$

Démonstration succincte du théorème 1.

Plaçons-nous sous les hypothèses des points a et b ; en se reportant au théorème 10, b (A, III, § 3) et à la démonstration du théorème 3 (A, III, § 2) on voit que sur la feuille $\mathcal{U}_j(f_\Lambda)$ *l'itérateur* f_Λ^{*j} *de* f_Λ *s'obtient comme somme d'une série :*

$$f_\Lambda^{*j}(z) = \mathcal{F}_\Lambda(z) + \sum_{n=0}^{n=(-1)^{j+1}\infty} \mathcal{A}_\Lambda \circ f^{\circ n}(z) \qquad (1)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \rho(\Lambda) = \text{résit}\,(f_\Lambda) \quad ; \quad \widetilde{(f_\Lambda)} = \rho(\Lambda)\log z + \sum_{n=-p}^{+\infty} C_n(\Lambda)\, z^n \\ \mathcal{F}_\Lambda(z) = \rho(\Lambda)\log_j z + \sum_{-p\leq n\leq +p} c_n(\Lambda)\, z^n \quad (**) \\ \mathcal{A}_\Lambda(z) = \mathcal{F}_\Lambda \circ f(z) - \mathcal{F}_\Lambda(z) - 1 = \mathcal{O}(z) \qquad (2) \end{cases}$$

Mais l'analycité en Λ *de* f_Λ *implique (comme on le vérifie à partir de la définition 1) l'analycité en* Λ *des coefficients* $a_n(\Lambda)$ *de Taylor de* f_Λ *, et donc aussi celle de* $\rho(\Lambda)$ *et celle des coefficients* $C_n(\Lambda)$ *de l'itérateur (formel)* $\left(\widetilde{(f_\Lambda)}\right)^*$ *de* $\widetilde{(f_\Lambda)}$ *(car* C_n *est un polynôme en* $a_p^{-1}, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{2p+n}$*).*

(**) $\log_j(z)$ désigne une certaine détermination de $\log z$ sur la feuille $\mathcal{U}_j(f_\Lambda)$ (Voir A, III, §3, théorème 7, a, β))

Cela étant, pour tout Λ_0 de $\mathcal{D}$, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{D}'$ de Λ_0 dans $\mathcal{D}$ assez petit pour que le premier coefficient non nul de f_Λ, soit $a_p(\Lambda)$, varie assez peu sur $\mathcal{D}'$ et que l'on ait :

$$\mathcal{U}_j(\mathcal{D}') = \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{D}'} \mathcal{U}_j(f_\Lambda) \neq \emptyset \quad (\text{et } \mathcal{U}_j(\mathcal{D}') \ \underline{\text{ouvert}})$$

Mais de (1), (2) et de l'holomorphie en Λ de $\rho(\Lambda)$ et des $C_n(\Lambda)$, on tire que sur la feuille non-vide $\mathcal{U}_j(\mathcal{D}')$ l'itérateur f_Λ^{*j} de f_Λ est somme d'une série normalement convergente, dont chaque terme est holomorphe. Donc, $f_\Lambda^{*j}(z)$ est holomorphe en (z,Λ) sur la "feuille" $\mathcal{U}_j(\mathcal{D}') \times \mathcal{D}'$. On déduit aisément de là, de proche en proche, tous les résultats souhaités concernant l'analycité (en Λ) des $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w)$, $\Pi_{f_\Lambda}(\varepsilon, k, w)$ et des scalaires

$\dot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon, \ell, n)$, $\ddot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon, \ell, n)$, $\dddot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon, \ell, n)$; ce qui établit les points a et b du théorème 1 (ainsi que son corollaire).

Quant aux points c et d, leur démonstration est analogue (remplacer $\mathcal{F}_\Lambda$ et $\mathcal{A}_\Lambda$ par des termes $\mathcal{F}_m$ et $\mathcal{A}_m$ appropriés, et montrer l'existence d'une série $S = \sum \left| \mathcal{A}_0\, g^{\circ n} \right|$ majorant uniformément les séries $S_m = \sum \left| \mathcal{A}_m \circ (f_m)^{\circ n} \right|$).

§ 2 : CALCUL EFFECTIF DES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_k$.

On a vu au théorème 7 (B, II § 3) que les $\mathcal{H}_k$-invariants $\ddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ et les invariants $\dddot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)$ sont identiquement nuls $(\forall \varepsilon, \ell, n)$ si f est un élément pleinement itérable de $\mathcal{G}_k$ (i.e $f \in I\mathcal{G}_k$). Il est donc naturel de chercher à étudier la dépendance en f des $\ddot{\Pi}_f$ et des $\dddot{\Pi}_f$ au voisinage de leurs "zéros", c'est-à-dire des f pleinement itérables. Cette méthode est d'autant plus intéressante qu'il existe - en un sens que précise le lemme 1 ci-dessous - des éléments pleinement itérables g de $\mathcal{G}_k$ "voisins" de tout élément donné f de $\mathcal{G}_k$ (f non nécessairement pleinement itérable). Commençons par donner la :

<u>Définition 2</u> : Soit f et g deux éléments de $\mathcal{G}_k$. On dit que g est une <u>approximante</u> de f si

$$\begin{cases} (\alpha) & \text{valit } f = \text{valit } g = p \\ (\beta) & f(z) - g(z) = o(z^{2p+1}) \end{cases}$$

<u>Remarques</u> : La relation " g est une approximante de f" est bien sûr une relation d'équivalence sur $\mathcal{G}_k$. La suite montrera qu'elle est moins artificielle qu'il ne paraît à première vue. Remarquons simplement pour l'instant que la relation "g est une approximante de f " équivaut à " $(\tilde{f})^*(z) - (\tilde{g})^*(z) = \tilde{\mathcal{O}}(z)$ " ou, ce qui revient au même, à :

" $f^{*j}(z) - g^{*j}(z) = \mathcal{O}(z)$ sur $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_j(g) \neq \emptyset$ " pour un j donné (et donc pour tout autre j : voir à ce sujet A, III, § 3). En d'autres termes, g est approximante de f si et seulement si les itérateurs (formels et sectoriels) de f et g coïncident à $\mathcal{O}(z)$ près, ce qui entraîne en particulier que : résit g = résit f.

<u>Lemme 1</u> : Soit f_Λ un élément de $\mathcal{G}_k$ dépendant analytiquement de n paramètres complexes $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}^n$ et supposons que

$$\begin{cases} p(\Lambda) = \text{valit}\,(f_\Lambda) = \text{Cste} = p \\ \rho(\Lambda) = \text{valit}\,(f_\Lambda) = \text{Cste} = \rho \end{cases}$$

Alors il est possible de trouver des éléments g_Λ et g de $\mathcal{G}_k$ tels que :

(α) g_Λ dépend analytiquement de Λ sur $\mathcal{D}$.

(β) g_Λ est conjugué de f_Λ par rapport à un élément k_Λ de $\mathcal{K}_k$ (i.e. $k_\Lambda \circ g_\Lambda = f_\Lambda \circ k_\Lambda$) qui dépend analytiquement de Λ sur $\mathcal{K}_k$.

(γ) pour tout Λ de $\mathcal{D}$, g_Λ est une approximante d'un élément(fixe) g de $\mathcal{G}_k$ que l'on peut choisir pleinement itérable.

On note enfin que (γ) peut être remplacée par (γ') :

(γ') pour tout Λ de $\mathcal{D}$, on a : $g_\Lambda = g \circ \mathscr{g}_\Lambda$

avec
- (i) g est un élément fixe (et, si on le veut, pleinement itérable) de $\mathcal{G}_k$ de la forme :

$$g(z) = z + z^{p+1} + \left(\frac{p+1}{2} - \rho\right) z^{2p+1} + o\left(z^{2p+1}\right)$$

- (ii) $\mathscr{g}_\Lambda$ est un élément de $\mathcal{G}_k$, de valuation itérative $> 2p$ et dépendant analytiquement de Λ sur $\mathcal{D}$.

<u>Indications sur la démonstration du lemme 1</u> :

On peut trouver un élément g de $\mathcal{G}_k$, pleinement itérable et tel que : valit $g = p$ et résit $g = \rho$. Il suffit par exemple de prendre pour g l'élément de $\mathcal{G}_k$ dont le logarithme itératif global est $z^{p+1} - p' z^{2p+1}$ avec $p' = p - \frac{1+p}{2}$

Pour tout g ainsi choisi, d'après le théorème 1 de B, I, § 2 il existe un élément $(\tilde{h})_\Lambda$ de $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que $\tilde{g}$ soit conjuguée de $\widetilde{(f_\Lambda)}$ par rapport à $(\tilde{h})_\Lambda$, c'est-à-dire :

(3) $$\tilde{g} = (\tilde{h})_\Lambda^{\circ(-1)} \circ \widetilde{(f_\Lambda)} \circ (\tilde{h})_\Lambda$$

(Attention à la position relative des tildes et parenthèses !)

D'après le théorème (B, II, § 2) le $(\tilde{h})_\Lambda$ défini par :

(3') $$(\tilde{g})^* = \widetilde{(f_\Lambda)}^* \circ (\tilde{h})_\Lambda$$

satisfait bien à (3) et appartient à $\tilde{\mathcal{K}}\{n\}$, mais pas nécessairement à $\tilde{\mathcal{K}}\{1\}$, et donc n'est pas nécessairement l'image d'un élément h_Λ de $\mathcal{K}_R$ par l'homomorphisme : $h \to \tilde{h}$ de $\mathcal{K}_R$ dans $\tilde{\mathcal{K}}$

Toutefois, en remplaçant le $(\tilde{h})_\Lambda$ défini par (3') par le polynôme h_Λ de degré $(p+2)$ et égal à la série formelle $(\tilde{h})_\Lambda$ à $\tilde{o}(z^{p+2})$ près, et en définissant g_Λ par :

(4) $$g_\Lambda = (h_\Lambda)^{\circ(-1)} \circ f_\Lambda \circ h_\Lambda$$

on obtient un élément g_Λ de $\mathcal{G}_R$ dont on vérifie qu'il satisfait aux conditions (α), (β) et (γ) du lemme 1. Quant à l'équivalence de $\{(\alpha), (\beta), (\gamma)\}$ et de $\{(\alpha), (\beta), (\gamma')\}$, elle est de vérification immédiate.

Mais les f_Λ et g_Λ du lemme 1, étant conjugués par rapport aux h_Λ de $\mathcal{K}_R$, possèdent les mêmes systèmes de ${}^c\mathcal{K}_R$-invariants et, a fortiori, d'invariants. En fin de compte, le lemme 1 nous apprend ceci :

Corollaire du lemme 1 :

Pour étudier les ${}^c\mathcal{K}_k$-invariants purs de $\mathcal{G}_k$ et les invariants purs de $\mathcal{G}_k$ comme fonctions holomorphes d'un système de variables complexes paramétrant les éléments f_Λ de $\mathcal{G}_k$, il suffit de se limiter à l'étude du cas où f_Λ est de la forme :

(5) $$f_\Lambda = f \circ \mathfrak{f}_\Lambda$$

avec (5') $$\begin{cases} f : \text{élément fixe de } \mathcal{G}_k \\ \mathfrak{f}_\Lambda : \text{élément variable de } \mathcal{G}_k, \text{ analytique en } \Lambda. \\ \frac{1}{2} \text{ valit } \mathfrak{f}_\Lambda > \text{valit } f = \mu \quad (\forall \Lambda) \end{cases}$$

De plus, il est même possible de se limiter au cas où le f de (5) est pleinement itérable.

On note que dans l'énoncé ci-dessus, à cause de la dernière des conditions (5'), pour tout Λ, f est une approximante de f_Λ. Ceci nous conduit à étudier les liens existant entre les invariants d'un élément f de $\mathcal{G}_k$ et les invariants de l'une de ses approximantes, soit g. Etant donné d'autre part que tous les invariants de f s'obtiennent simplement à partir des fonctions auxiliaires $\Omega^f_{j,j'} = f^{*j} \circ {}^{j'*}f$ introduites en II, § 1 (dans la démonstration des théorèmes 1, 2, 3 et 4) il suffit de comparer $\Omega^f_{j,j'}$ et $\Omega^g_{j,j'}$; c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2 : Soit f un élément de $\mathcal{G}_k$ et g une approximante de f ; soient j et j' deux entiers relatifs tels que $|j-j'| = 1$ et soient $\Omega^f_{j,j'}(w)$ et $\Omega^g_{j,j'}(w)$ les fonctions auxiliaires, pseudo-invariantes, périodiques en w, de période 1, attachées à f et g par les relations :

(6) $$\Omega^f_{j,j'} = f^{*j} \circ {}^{j'*}f \quad \text{et} \quad \Omega^g_{j,j'} = g^{*j} \circ {}^{j'*}g$$

Alors $\Omega^f_{j,j'}$ est liée à $\Omega^g_{j,j'}$, et aux itérateurs de f et g, par les relations suivantes, valables dès que $(-1)^{i n f(j,j')} \operatorname{Im} w$ est assez grand :

$$\left\{\begin{array}{ll}
(7) & \Omega^f_{j,j'}(w) = \lim\limits_{n \to (-1)^{j+1}\infty} \left\{ g^{*j} \circ f^{\circ n} \circ {}^{j'*}f(w) - n \right\} \\
(8) & \Omega^f_{j,j'}(w) = \lim\limits_{n \to (-1)^{j+1}\infty} \left\{ f^{*j} \circ f^{\circ n} \circ {}^{j'*}g(w - n) \right\} \\
(9) & \Omega^f_{j,j'}(w) = \lim\limits_{n_1 \text{ et } n_2 \to (-1)^{j+1}\infty} \left\{ g^{*j} \circ f^{\circ(n_1+n_2)} \circ {}^{j'*}g(w - n_2) - n_1 \right\} \\
(10) & \Omega^f_{j,j'}(w) - \Omega^g_{j,j'}(w) = \lim\limits_{n \to (-1)^{j}\infty} \left\{ \left(f^{*j} - g^{*j}\right) \circ {}^{j'*}g(w+n) \right\} \\
(11) & \left\{\begin{array}{l}
\left(\Omega^f_{j,j'} \circ \Omega^g_{j',j}\right)(w) = w + \Omega^{f,g}_j(w) \\
\text{où } \Omega^{f,g}_j \text{ ne dépend pas de } j' (= j \pm 1) \text{ et est donné par} \\
\Omega^{f,g}_j(w) = \lim\limits_{n \to (-1)^{j}\infty} \left\{ \left(f^{*j} - g^{*j}\right) \circ {}^{j*}g(w+n) \right\}
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Ces relations sont valables notamment dans le cas où l'on choisit pour f une approximante g pleinement itérable (ce qui est toujours possible) et alors (10) et (11) se simplifient et s'écrivent toutes deux :

$$(12)\left\{\begin{array}{l}
\Omega^f_{j,j'}(w) = w + \Omega^{f,g}_j(w) \\
\text{avec } \Omega^{f,g}_j(w) = \lim\limits_{n \to (-1)^{j}\infty} \left\{ \left(f^{*j} - g^{*j}\right) \circ {}^{j*}g(w+n) \right\}
\end{array}\right.$$

<u>Démonstration succincte du théorème 2</u> :

D'après la définition 2 ci-dessus les itérateurs sectoriels de f et g coïncident, sur les "domaines"(**) <u>non-vides</u> $\mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_j(g)$ à un terme $O(z)$ près.

(**) non nécessairement connexes

$$\begin{cases} \text{(i) } f_\Lambda \text{ (et donc aussi } \mathfrak{f}_\Lambda \text{) est analytique en } \Lambda = \{h_1, \ldots, h_r\} \\ \quad \text{sur un domaine } \mathcal{D} \text{ de } \mathbb{C}^r \text{ qu'on peut supposer} \\ \quad \text{contenir } \{0, \ldots, 0\} \\ \text{(ii) } \tfrac{1}{2} \text{ valit } f_\Lambda \left(= \tfrac{1}{2} \text{ valit } \mathfrak{f}_\Lambda \right) > \text{valit } f = p \; (\forall \Lambda \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

Soient $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w)$ et $\Omega^{f}_{j,j'}(w)$ les fonctions(**) pseudo-invariantes, périodiques de période 1 en w, attachées à f_Λ et f respectivement, et soient les développements en série convergente (par rapport à Λ) de $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}$ au point $\{0, \ldots, 0\}$:

(16) $$\left(\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'} \circ \Omega^{f}_{j',j}\right)(w) = w + \sum_{|A| \geq 1} \Lambda^A \Omega_j(A, w)$$

ou, si f est choisie pleinement itérable :

(16 bis) $$\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w) = w + \sum_{|A| \geq 1} \Lambda^A \Omega_j(A, w)$$

avec les conventions habituelles relatives aux multi-incices, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A = \{a_1, \ldots, a_r\} \in \mathbb{N}^r \\ |A| = \sum |a_i| \\ \Lambda^A = h_1^{a_1} \ldots h_r^{a_r} \end{cases}$$

Moyennant ces notations, les coefficients $\Omega_j(A,w)$ intervenant dans le développement de $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w)$ en série de Λ [ou encore, les $\Omega_j\left(A, f^{*j}(z)\right)$, ce qui revient au même, du fait de l'univalence des f^{*j}] sont explicitement calculables au moyen des opérateurs linéaires R, X, Y_j, T_j, S_j, t_A et s_A définis par :

(**) On rappelle que $\mathfrak{f}_\Lambda = f \circ f_\Lambda$

$$\begin{cases} \text{(i) } f_\Lambda \text{ (et donc aussi } \check{f}_\Lambda \text{) est analytique en } \Lambda = \{h_1, \dots, h_r\} \\ \quad \text{sur un domaine } \mathcal{D} \text{ de } \mathbb{C}^r \text{ qu'on peut supposer} \\ \quad \text{contenir } \{0, \dots, 0\} \\ \text{(ii) } \frac{1}{2} \text{ valit } f_\Lambda \left(= \frac{1}{2} \text{ valit } \check{f}_\Lambda \right) > \text{ valit } f = p \ (\forall \Lambda \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

Soient $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w)$ et $\Omega^{f}_{j,j'}(w)$ les fonctions(**) pseudo-invariantes, périodiques de période 1 en w, attachées à f_Λ et f respectivement, et soient les développements en série convergente (par rapport à Λ) de $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}$ au point $\{0, \dots, 0\}$:

$$\text{(16)} \quad \left(\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'} \circ \Omega^{f}_{j',j}\right)(w) = w + \sum_{|A| \geq 1} \Lambda^A \Omega_j(A, w)$$

ou, si f est choisie pleinement itérable :

$$\text{(16 bis)} \quad \Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w) = w + \sum_{|A| \geq 1} \Lambda^A \Omega_j(A, w)$$

avec les conventions habituelles relatives aux multi-incices, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A = \{a_1, \dots, a_r\} \in \mathbb{N}^r \\ |A| = \sum |a_i| \\ \Lambda^A = h_1^{a_1} \dots h_r^{a_r} \end{cases}$$

Moyennant ces notations, les coefficients $\Omega_j(A,w)$ intervenant dans le développement de $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w)$ en série de Λ [ou encore, les $\Omega_j\left(A, f^{*j}(z)\right)$, ce qui revient au même, du fait de l'univalence des f^{*j}] sont explicitement calculables au moyen des opérateurs linéaires R, X, Y_j, T_j, S_j, t_A et s_A définis par :

(**) On rappelle que $\check{f}_\Lambda = f \circ f_\Lambda$

$$\Phi \circ \overline{f}_\Lambda = \Phi + \sum_{|A|\geq 1} \Lambda^A t_A \Phi \qquad \textit{(pour } \Lambda \textit{ petit)}$$

$$\Phi \circ \underline{f}_\Lambda = \Phi + \sum_{|A|\geq 1} \Lambda^A s_A \Phi \qquad \textit{(pour } \Lambda \textit{ petit)}$$

$$R.\Phi = \Phi \circ f \quad \left(\textit{et donc : } R^n.\Phi = \Phi \circ f^{\circ n} \ \forall n \in \mathbb{Z} \right)$$

$$T_j = -1 - S_j = \begin{cases} \textit{si } j \textit{ est pair : } R^{-1} + R^{-2} + R^{-3} + \dots \\ \textit{si } j \textit{ est impair : } -1 - R - R^2 - R^3 - \dots \end{cases}$$

$$X = T_0 - T_1 = S_1 - S_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} R^n$$

$$(Y_j . \Phi)(w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi \circ {}^{j*}f(n+w)$$

<u>*Remarque*</u> *:* t_A *et* s_A *sont des opérateurs différentiels de degré* $|A|$ *;* T_j *et* S_j $\left(\textit{resp } X \textit{ et } Y_j\right)$ *s'appliquent à toute* Φ *définie sur* $\mathcal{U}_j(f)$ $\left(\textit{resp. sur } \mathcal{U}_j(f) \cap \mathcal{U}_{j\pm 1}(f)\right)$ *ou sur un sous-ensemble convenable de ce domaine, et telle que* $\Phi(z) = O(z^{\nu+1})$ *quand* $z \to 0$

D'une façon explicite, on a, pour tout multi-indice A *et pour des* z $\left(\textit{resp. } w\right)$ *appartenant aux domaines convenables :*

$$\text{(17)} \quad \Omega_j(A, f^{*j}(z)) = (-1)^j \sum X t_{A_1} T_j t_{A_2} \dots T_j t_{A_q} f^{*j}(z)$$
$$= (-1)^{j+1} \sum X s_{A_1} S_j s_{A_2} \dots S_j s_{A_q} f^{*j}(z)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\text{(17 bis)} \quad \Omega_j(A, w) = (-1)^j Y_j \left\{ \sum t_{A_1} T_j t_{A_2} \dots T_j t_{A_q} f^{*j} \right\}(w)$$
$$= (-1)^{j+1} Y_j \left\{ \sum s_{A_1} S_j s_{A_2} \dots S_j s_{A_q} f^{*j} \right\}(w)$$

avec les conventions de sommation suivantes (pour 17 et 17 bis).

$$\sum A_i = A \quad ; \quad |A_i| \geqslant 1 \quad \left(A \text{ et } A_i \text{ multiindices}\right)$$

Bornons-nous à indiquer le principe de la démonstration : (17) résulte de (17 bis), qui elle-même peut se déduire de la relation (10) du théorème 2, jointe aux relations (18) et (19) qui suivent :

$$(18) \qquad f_{\Lambda}^{*j} = f^{*j} + \sum_{|A|\geqslant 1} \left(\sum_{\sum A_i = |A|} \left(T_j t_{A_1} \ldots T_j t_{A_q} f^{*j} \right) \Lambda^{A} \right)$$

$\left(\text{Pour } \Lambda \text{ voisin de } \{0,\ldots,0\}\right)$

$$(19) \qquad f_{\Lambda}^{*j} = f^{*j} + R^{-1} \sum_{|A|\geqslant 1} \left(\sum_{\sum A_i = |A|} \left(S_j s_{A_1} \ldots S_j s_{A_q} f^{*j} \right) \Lambda^{A} \right)$$

$\left(\text{Pour } \Lambda \text{ voisin de } \{0,\ldots,0\}\right)$

Ce sont donc ces relations (18) et (19) qu'il s'agit d'établir. On peut, grosso modo, procéder comme suit : moyennant la définition de f_{Λ}, $\mathfrak{f}_{\Lambda}$ et $\underline{f}_{\Lambda}$, l'équation fonctionnelle de l'itérateur sectoriel f_{Λ}^{*} de f_{Λ} s'écrit sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} (20) \qquad f_{\Lambda}^{*j} \circ f \circ \mathfrak{f}_{\Lambda} = 1 + f_{\Lambda}^{*j} \\ (21) \qquad f_{\Lambda}^{*j} \circ f = 1 + f_{\Lambda}^{*j} \circ \underline{f}_{\Lambda} \end{cases}$$

Portant formellement dans (20) (resp (21)) l'expression de f_Λ^{*j} correspondant à (19) (resp (18)) et tenant compte de la définition des opérateurs différentiels δ_A (resp k_A) à partir de f_Λ (resp f_Λ) on vérifie que (20) et (21) sont formellement satisfaits (identiquement, pour chaque coefficient d'un Λ^A). Mais d'autre part, dans le second membre de (18) (et de 19) le coefficient de Λ^A est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}_j(f)$ (ou sur un $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}_j(f)$) tout entier, <u>et qui, de plus, admet en 0 sur $\mathcal{U}_j(f)$ un développement asymptotique fort</u>. Ce dernier point résulte de la forme de T_j et S_j : pour tout j , $T_j \Phi$ et $S_j \Phi$ sont des sommes infinies de $\Phi \circ f^{\circ n}$ avec $f^{\circ n}$ convergeant vers 0 sur $\mathcal{U}_j(f)$, et, d'autre part, dans (18) et (19), chaque T_j et S_j est appliqué à un Φ qui est un $O(z^{p+1})$ sur $\mathcal{U}_j(f)$, ainsi qu'on le vérifie par recurrence (ceci assure la convergence). Moyennant quoi, et compte tenu des résultats des chapitres précédents qui nous assurent :

(i) de l'existence et de l'unicité de l'itérateur sectoriel

(ii) de sa caractérisation par l'équation fonctionnelle et la propriété du développement asymptotique fort

(iii) de son holomorphie par rapport à tout système Λ de paramètres dont f_Λ dépend analytiquement.

nous pouvons affirmer que dans les seconds membres de (18) et (19) le coefficient de Λ^A est bien égal à : $\dfrac{1}{A!} \dfrac{\partial^{|A|}}{(\partial\Lambda)^A} \cdot f_\Lambda^{*j}$

c. q. f. d.

Pour terminer, remarquons que les opérateurs différentiels k_A et δ_A s'expriment élémentairement en fonction des coefficients

γ_A *et* δ_A *figurant dans les développements de* f_Λ *et* $\overset{\circ}{f}_\Lambda$ *en série de* Λ (*c'est-à-dire :* $f_\Lambda(z) = z + \sum \Lambda^A \gamma_A(z)$ et $\overset{\circ}{f}_\Lambda(z) = z + \sum \Lambda^A \delta_A(z)$)

t_A *et* Δ_A *s'expriment d'une manière spécialement simple dans les deux cas particuliers suivants :*

Premier cas particulier :

$\Lambda = \{\lambda\}$ *(un seul paramètre) et* $f_\Lambda(z) = f \circ f_\Lambda(z)$ *avec* $f_\lambda^{\circ(-1)}(z) = f_\lambda(z) = z + \lambda\varphi(z)$ *, où* φ *est une fonction holomorphe au voisinage de* 0 *et de la forme :*

$$\varphi(z) = \mathcal{O}(z^{2p+2}) \; ; \quad p = \text{valit } f \; .$$

Alors, les t_A *se réduisent aux* $t_n = \dfrac{\varphi^n(z)}{n!} \dfrac{d^n}{dz^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Deuxième cas particulier :

$\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ *et* $f_\Lambda = f \circ (f_1)^{\circ\lambda_1} \circ \dots \circ (f_r)^{\circ\lambda_r}$ *où chaque* f_i *est un élément de* $\mathcal{G}_{\mathrm{id}}$ *pleinement itérable, possédant par conséquent un logarithme itératif global* $(f_i)_*$*, qui est une fonction holomorphe au voisinage de* 0 *.*

On pose : $\tau_i = (f_i)_*(z) \dfrac{d}{dz}$.

Alors, pour tout multi-indice entier A :

$$\Delta_A = \sum_{\begin{cases} \sum A_q = A \\ |A_q| \geq 1 \end{cases}} \frac{\sigma^{A_1} \dots \sigma^{A_n}}{(A_1)! \dots (A_n)!} \quad \text{et} \quad t_A = (-1)^{|A|} \sum_{\begin{cases} \sum A_q = A \\ |A_q| \geq 1 \end{cases}} \frac{\tau^{A_1} \dots \tau^{A_n}}{(A_1)! \dots (A_n)!}$$

avec les notations symboliques :

$$\left\{\begin{array}{l} A_q = \{a_{q1}, \dots, a_{qr}\} \; ; \; (A_q)! = (a_{q1})! \dots (a_{qr})! \\ \tau^{A_q} = \tau_1^{a_{q1}} \dots \tau_r^{a_{qr}} \\ \sigma^{A_q} = \tau_r^{a_{qr}} \dots \tau_1^{a_{q1}} \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{(attention à l'ordre)}$$

On approfondira l'étude de ces deux cas particuliers au paragraphe suivant et on en tirera <u>*en fait*</u> *le moyen de calculer*

$$\frac{\partial^{|A|}}{(\partial\Lambda)^A} \ddot{\prod}_{\gamma_\Lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{|A|}}{(\partial\Lambda)^A} \dddot{\prod}_{\gamma_\Lambda}$$

pour tout multi-indice A *et pour le* γ_Λ <u>*le plus général*</u>*, autrement dit, le moyen de* calculer *les coefficients entrant dans les dévelop-pements de* $\ddot{\prod}_\gamma$ *et* $\dddot{\prod}_\gamma$ *en série d'une infinité de variables com-plexes (déterminant* γ *).*

§ 3 : CALCUL EFFECTIF DES INVARIANTS PURS DE $\mathcal{G}_h$ (SUITE ET FIN).

Vu la densité de $I\mathcal{G}_h$ *dans* $\mathcal{G}_h$ *(au sens de la convergence simple des coefficients), il est légitime de chercher à étudier les invariants au voisinage de leurs zéros, autrement dit, d'étudier les* $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}$, Π_{f_Λ}, $\dot{\Pi}_{f_\Lambda}$, $\ddot{\Pi}_{f_\Lambda}$, $\dddot{\Pi}_{f_\Lambda}$ *etc ... pour des* f_Λ *de la forme :*

$$(22)\quad \begin{cases} f_\Lambda = f \circ f_\Lambda \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ valit } f_\Lambda > \text{valit } f. \\ f_\Lambda \text{ analytique en } \Lambda. \end{cases}$$

pour des Λ *petits et* *un* f *pleinement itérable.*

Le cas plus particulier et important où resit f *(et par suite résit* f_Λ *aussi) est nul mérite aussi de retenir l'attention, car alors, par un changement de variable holomorphe convenable, on peut toujours se ramener au cas d'une* f *de la forme :*

$$f(z) = z\,(1 - p\,z^p)^{-p^{-1}} \iff f_*(z) = z^{p+1} \quad (p \geqslant 1)$$

En bref, dans la suite, nous envisagerons les deux systèmes d'hypothèses suivants :

$$\mathcal{H}_1 \begin{cases} f_\Lambda = f \circ f_\Lambda \;;\; \text{valit } f = p \geqslant 1 \;;\; f \text{ est pleinement} \\ \text{itérable et son logarithme itératif global est noté } f_*. \\ f_\Lambda^{\circ(-1)} \text{ est noté } \check{f}_\Lambda \;;\; f_\Lambda \text{ et } \check{f}_\Lambda \text{ sont analytiques} \\ \text{en } \Lambda \text{ et de la forme : } \quad z + o\left(z^{2p+1}\right) \\ \text{résit } f = 0 = \text{résit } f_\Lambda \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_2 \begin{cases} \text{Mêmes hypothèses qu'en } \mathcal{H}_1, \text{ avec } f_*(z) = z^{p+1}, \text{ ou,} \\ \text{ce qui revient au même : } f(z) = z\,(1-p\,z^p)^{-p^{-1}} \end{cases}$$

Sous les hypothèses générales $\mathcal{H}_1$ *ou* $\mathcal{H}_2$ $(\Rightarrow f \in I\mathcal{G}_k)$ *les fonctions* $\Omega^{f}_{j,j'}(w)$ *sont toutes* $\equiv w$ *et par suite les relations (16) et (16 bis) du théorème 3 ci-avant s'écrivent :*

$$(22) \qquad \Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(w) = w + \sum_{|A|\geq 1} \Lambda^A \Omega_j(A,w)$$

Mais par suite de la définition de $\Pi_f(\varepsilon,k,w)$ *et de la nullité des résidus itératifs de* f_Λ *et* f *,* $\Pi_{f_\Lambda}(\varepsilon,k,w)$ *se rattache aux* $\Omega^{f_\Lambda}_{j,j'}(A,w)$ *d'une manière particulièrement simple, à savoir :*

$$(23) \quad \begin{cases} \Pi_{f_\Lambda}(1,k,w) = \Omega^{f_\Lambda}_{2k,j'}(w) - w = \sum_{|A|\geq 1} \Lambda^A \Omega^{f_\Lambda}_{2k}(A,w) \\ \Pi_{f_\Lambda}(-1,k,w) = \Omega^{f_\Lambda}_{j',2k}(w) - w = \sum_{|A|\geq 1} \Lambda^A \Omega^{f_\Lambda}_{j'}(A,w) \\ \text{avec } j' = 2k+1 \ (\text{resp. } 2k-1) \text{ si } \operatorname{Im} w > 0 \ (\text{resp.} < 0) \end{cases}$$

Comme enfin les $\dot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon,\ell,n)$ *sont caractérisées à partir de* $\Pi_{f_\Lambda}(\varepsilon,k,w)$ *par :*

$$(24) \qquad \dot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon,k,w) = \sum \dot{\Pi}_{f_\Lambda}(\varepsilon,\ell,n)\, e^{2\pi i\left(\frac{k\ell}{p}+nw\right)}$$

et que les $\ddot{\Pi}_{f_\Lambda}$ *et* $\dddot{\Pi}_{f_\Lambda}$ *se déduisent aussitôt des* $\dot{\Pi}_{f_\Lambda}$ *, il est clair que les relations (23), jointes à l'expression explicite des* $\Omega_j(A,w)$ *fournie par les relations (17 bis) du théorème 3 (B, III, § 2) donnent le moyen de calculer effectivement le développement en puissances de* Λ *, au voisinage de* $\Lambda_0 = \{0,0,\dots\}$*, des invariants et semi-invariants attachés à* f_Λ *.*

Nous nous bornerons dans la suite au cas où $\varepsilon = +1$ *, le cas* $\varepsilon = -1$ *étant tout analogue.*

On constate alors que la relation (17 bis) (B, III, § 2) *fournit* $\Omega_j^{f_\Lambda}(A,w)$ *comme somme de termes de la forme*

(25) $$Y_j\, t_{A_1}\, T_j\, t_{A_2} \dots T_j\, t_{A_q}\, f^{*j}.$$

Comme chaque t_{A_i} *est un opérateur différentiel de degré fini, à coefficients qui sont des fonctions holomorphes en* O *,* t_{A_i} *est somme d'opérateurs de la forme*

(26) $$\begin{cases} \varphi_1(z)\,\theta\ \ \varphi_2(z)\,\theta \dots \varphi_{q-1}(z)\,\theta\ \varphi_q(z) \\ \text{avec}\quad \theta = f_*(z)\,\dfrac{d}{dz} \end{cases}$$

Comme enfin $T_j = R^{-1} + R^{-2} + R^{-3} \dots$ *lorsque* j *est pair et que les opérateurs* R^n *commutent entre eux et avec l'opérateur* θ *, on tire de (26) et (25) que pour* j *pair,* $\Omega_j^{f_\Lambda}(A,w)$ *est somme de séries de la forme*

(27) $$\sum_{m_i>0} Y_j \left\{ \Psi_0\, R^{-m_1}\, \Psi_1\, R^{-m_2}\, \Psi_2 \dots R^{-m_q}\, \Psi_q \right\}$$

soit encore

(28) $$\sum_{m_i>0} Y_j \left\{ (\Psi_0)\left(R^{-m_1}\Psi_1\right)\left(R^{-m_1-m_2}\cdot\Psi_2\right)\dots\left(R^{-m_1\dots-m_q}\cdot\Psi_q\right)\right\}$$

Finalement, on peut énoncer :

> a) <u>*Sous les hypothèses* $\mathcal{H}_1$</u> *, pour chaque multi-indice entier* $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ *, le terme :* $\Omega_{2k}^{f_\Lambda}(A,w)$ *, d'ailleurs égal à :* $\dfrac{1}{A!}\left\{\dfrac{\partial^{|A|}}{(\partial\Lambda)^A}\,\Pi_{f_\Lambda}(1,k,w)\right\}_{\Lambda_0=\{0,0,\dots\}}$ *, est une somme finie de séries du type :*
>
> (29) $$\sum \left[(\Psi_0)_0^{2k*} f(w+n_0)\right]\left[(\Psi_1)_0^{2k*} f(w+n_1)\right]\dots\left[(\Psi_q)_0^{2k*} f(w+n_q)\right]$$
> $$(+\infty > n_0 > n_1 > \dots > -\infty)$$
>
> *où les* Ψ_n *sont holomorphes au voisinage de* O *.*

b) <u>Sous les hypothèses $\mathcal{H}_2$:</u> $\quad {}^{2k*}f(w) = e^{2\pi i\frac{k}{p}-\frac{1}{p}} p^{-\frac{1}{p}}(-w)^{-\frac{1}{p}}$

et par suite $\Omega^{g_\Lambda}_{2k}(A,w)$, ou ce qui revient au même, le terme :

$$\frac{1}{A!}\left\{\frac{\partial^{|A|}}{(\partial\Lambda)^A}\prod_{g_\Lambda}(1,k,w)\right\}_{\Lambda_0=\{0,0,\dots\}}$$ s'exprime comme somme finie de fonctions auxiliaires $\Phi_{\{\Delta_i\}}(w)$, définies par :

$$(30)\qquad \Phi_{\{\Delta_1,\dots,\Delta_q\}}(w) = \sum_{-\infty<n_1<n_2<\dots<n_q<+\infty}\ \prod_{i=1}^{i=q}[w-n_i]^{-\Delta_i}\qquad (\Im m\, w\neq 0)$$

où $[w]^{-\Delta}$ désigne la détermination principale de $w^{-\Delta}$ sur le domaine $\mathbb{C} \div [-\infty,0]$ et où les Δ_i sont des rationnels appartenant à $p^{-1}\mathbb{N}$.

Vu l'importance des fonctions $\Phi_{\{\Delta_i\}}(w)$ pour la théorie des invariants holomorphes, disons-en quelques mots. Tout d'abord, bien qu'on puisse étendre leur définition, par divers procédés de prolongation analytique, à des systèmes $\{\Delta_i\}$ très généraux, nous n'aurons besoin ici que du cas élémentaire où chaque $\mathcal{R}e\,\Delta_i$ est >1 (<u>en fait:</u> du cas où chaque Δ_i est rationnel et >1) ce qui assure la convergence uniforme du second membre de (30) dans tout domaine $|\Im m\, w| \geqslant u > 0$.

Chaque $\Phi_{\{\Delta_i\}}(w)$ est, bien entendu, périodique de période 1 en w et l'on a : $\quad \Phi_{\{\Delta_i\}}(w) = \overline{[\Phi_{\{\Delta_i\}}(\overline{w})]}$

Toutefois, en général, pour un w_0 réel non entier, $\Phi_{\{\Delta_i\}}(w)$ tend vers deux limites, $\ell_+(w_0)$ et $\ell_-(w_0)$, distinctes et non-réelles, lorsque $w\to w_0$ dans le demi-plan supérieur ou inférieur.

Dans le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$ (resp < 0) $\Phi_{\{s_i\}}$ est de la forme

$$(31) \qquad \Phi_{\{s_i\}}(w) = \sum_{n>0\,(\text{resp}<0)} \gamma_n\{s_i\}\, e^{2\pi i n w}$$

(et bien sûr : $\gamma_{-n}\{s_i\} = \overline{\gamma_n\{s_i\}}$)

Lorsqu'on développe la théorie des invariants holomorphes, il s'avère que les $\gamma_n\{s_i\}$ jouent un rôle essentiel pour l'étude des $\ddot{\Pi}_f$ et des $\dddot{\Pi}_f$. Les $\gamma_n\{s_i\}$ sont d'ailleurs assez commodément explicitables, sous forme d'intégrales, mais nous n'insisterons pas.

Pour donner une idée plus précise des invariants et semi-invariants, nous allons expliciter les calculs dans les deux cas particuliers signalés à la fin du paragraphe précédent. Bornons-nous à donner les énoncés sans démonstrations.

<u>Théorèmes 4</u> :

a) Soient f et g deux éléments de $\mathcal{G}_k$, pleinement itérables et tels que $\frac{1}{2}$ valit $g >$ valit f

Alors si on pose, pour tout μ entier :

$$\theta_\mu(z) = \left[f_*(z)\,\frac{d}{dz}\right]^{\mu} \cdot \left[\frac{g_*(z)}{f_*(z)}\right] = \frac{[g_*, f_*](z)}{f_*(z)}\,\frac{d}{dz}$$

on aura, pour tout entier a :

$$\left\{\frac{\partial^a}{\partial h^a}\,\Pi_{f\circ g^{\circ h}}(1, k, w)\right\}_{h=0} =$$

$$\sum \frac{a!}{\hat{v}_1!\,\hat{v}_2!\ldots\hat{v}_a!}\left[(\theta_{u_1})_0\, {}^{k*}f(n_{v_1}+w)\right]\ldots\left[(\theta_{u_a})_0\, {}^{k*}f(n_{v_a}+w)\right]$$

où le $\sum$ est étendu

(**) à toutes les suites $\{\mu_1,\dots,\mu_a\}$ telles que : $\begin{cases} \mu_1+\dots+\mu_a = a-1 \\ 0 \leq \mu_i \leq i-1 \end{cases}$

(**) à toutes les suites $\{v_1,\dots,v_a\}$ telles que : $v_1 = 1;\ 0 \leq v_{i+1}-v_i \leq 1$

(**) à tous les systèmes d'entiers $\{r_1, r_2, \dots\}$

tels que : $\infty > r_1 > r_2 > \dots > -\infty$

et, enfin, où l'on a posé :

(**) $\hat{v}_m = \sum_{v_i = m} 1$

b) Dans le cas particulier où : $f_*(z) = z^{p+1}$; $g_*(z) = z^{p+q+1}$

$(q>p)$ on a, si u est un entier >0

$$(\theta_u)_0 {}^{k*}f(w) = p^{-q/p}\, e^{2\pi i \frac{kq}{p}} \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p}+1\right)\dots\left(\frac{q}{p}+u-1\right)(-w)^{-\frac{q}{p}-u}$$

et si $u=0$:

$$(\theta_0)_0 {}^{k*}f(w) = p^{-q/p}\, e^{2\pi i \frac{kq}{p}}\, (-w)^{-\frac{q}{p}}$$

ce qui permet de donner la forme explicite du coefficient de λ^a dans le développement de Taylor en 0 de $\prod_{f\circ(g^{o\lambda})}$ et d'étudier sur un cas particulier

(à savoir : $f_\lambda = f\circ g^{o\lambda}$ avec :

$f\circ g^{o\lambda}(z) = z\left[1-(p+q)\lambda z^{p+q}\right]^{-\frac{1}{p+q}}\left[1-pz^p\left(1-(p+q)\lambda z^{p+q}\right)^{-\frac{p}{p+q}}\right]^{-\frac{1}{p}}$)

les fonctions entières $(\text{en } \lambda)$:

$$\prod_{f_\lambda}(\varepsilon, \ell, n)\ ,\ \ddot{\prod}_{f_\lambda}(\varepsilon, \ell, n) \text{ et } \dddot{\prod}_{f_\lambda}(\varepsilon, \ell, n)$$

Indiquons pour terminer un théorème plus général, qui permet, moyennant des changements simples de paramétrage analytique des éléments f de $\mathcal{G}_k$, de développer les $\dot{\prod}_f$, $\ddot{\prod}_f$ et $\dddot{\prod}_f$ par rapport au paramétrage le plus naturel : celui des coefficients (a_i) de Taylor de f en 0 $\left(f(z) = z + \sum_{n\geq p} a_n z^{n+1}\right)$.

<u>Théorème 5</u> : Soit $f(z) = z(1-pz^p)^{-\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$ un élément pleinement itérable de $\mathcal{G}_R$, et soit f_Λ un élément de $\mathcal{G}_R$ tel que la fonction g_Λ définie par :

$$g_\Lambda = f_\Lambda^{\circ(-1)} \circ f \qquad \text{soit de la forme :} \quad z + \sum_{n>2p} \lambda_n z^{n+1}.$$

Alors on peut expliciter le développement de Π_{g_Λ} et $\dot{\Pi}_{g_\Lambda}$, et par suite aussi celui des ${}^c\mathcal{H}_R$-invariants $\ddot{\Pi}_{g_\Lambda}$ et des invariants scalaires $\dddot{\Pi}_{g_\Lambda}$ en fonction de $\Lambda = \{\lambda_n\}$ au voisinage de $\{0,0,\dots\}$.

Voici à titre d'exemple ces développements, limités aux termes de degré global <3 par rapport aux λ_n.

a) $$\Pi_{g_\Lambda}(1,k,w) = \sum_{n_1} \lambda_{n_1} e^{2\pi i \frac{k n_1}{p}} p^{-\frac{n_1-p}{p}} \Phi_{\{\frac{n-p}{p}\}}(w)$$

$$+ \sum_{n_1,n_2} \lambda_{n_1}\lambda_{n_2} e^{2\pi i \frac{k(n_1+n_2)}{p}} p^{-\frac{n_1+n_2-p}{p}} (n_1-p) \Phi_{\{\frac{n_2-p}{p},\frac{n_1}{p}\}}(w)$$

$$- \sum_{n_1,n_2} \binom{p+1}{2} \lambda_{n_1}\lambda_{n_2} e^{2\pi i \frac{k(n_1+n_2)}{p}} p^{-\frac{n_1+n_2-p}{p}} \Phi_{\{\frac{n_1+n_2-p}{p}\}}(w)$$

$+ \dots$

b) $$\dot{\Pi}_{g_\Lambda}(1,\ell,n) = \sum_{n_1 \equiv \ell (\mathrm{mod}\, p)} \lambda_{n_1} p^{-\frac{n_1-p}{p}} \gamma_n\left\{\frac{n_1-p}{p}\right\}$$

$$+ \sum_{n_1+n_2 \equiv \ell (\mathrm{mod}\, p)} \lambda_{n_1}\lambda_{n_2} p^{-\frac{n_1+n_2-p}{p}} \left\{-\binom{p+1}{2}\gamma_n\left\{\frac{n_1+n_2-p}{p}\right\} + (n_1-p)\gamma_n\left\{\frac{n_2-p}{p},\frac{n_1}{p}\right\}\right\}$$

$+ \dots$

où les $\gamma_n\{n_i\}$ sont les coefficients de Fourrier des $\Phi_{\{s_i\}}(w)$ [Voir ci-avant].

CHAPITRE IV

LES INVARIANTS MIXTES DE $\tilde{\mathcal{G}}$ ET $\tilde{\mathcal{H}}$

§ 1 : INVARIANTS BINAIRES ET ITERATIVEMENT HOMOGENES DE $\tilde{\mathcal{G}}$.

Rappelons que conformément à la définition 1 (cf B, I, § 1) un invariant (resp K-invariant) mixte d'un groupe G est une application $(g_1,\dots,g_n) \longrightarrow I(g_1,\dots,g_n)$ de G^n dans un ensemble E telle que pour tout σ appartenant au groupe Aut G des automorphismes de G (resp. au sous-groupe K de Aut G) et pour tout $\{g_i\}$ de G^n on ait :

$$I(\sigma g_1,\dots,\sigma g_n) = I(g_1,\dots,g_n)$$

Nous nous occuperons ici des groupes $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ et de deux sous-groupes de Aut $\tilde{\mathcal{G}}$ (isomorphe à Aut $\tilde{\mathcal{H}}$), à savoir ${}^c\tilde{\mathcal{K}}$ et Aut $\tilde{\mathcal{G}}$ lui-même. (${}^c\tilde{\mathcal{K}}$ désigne, on le rappelle, le groupe des automorphismes de $\tilde{\mathcal{G}}$, ou de $\tilde{\mathcal{H}}$, qui sont de la forme :
$\tilde{g} \rightarrow {}^c\tilde{h}.\tilde{g} = (\tilde{h})^{\circ(-1)} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h}$ *avec* $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{K}}$).

Nous nous bornerons en fait dans le présent chapitre à étudier les invariants mixtes du groupe $\tilde{\mathcal{G}}$ seul, car les résultats s'étendent sans difficultés majeures à $\tilde{\mathcal{H}}$.

D'autre part, par abus de langage, nous appellerons, tout au long de ce chapitre <u>*invariants*</u> *(au lieu de* <u>${}^c\tilde{\mathcal{K}}$ *-invariants*</u>*) les fonctions* I *à valeurs complexes que nous construirons et qui seront telles que :*

$$I(\sigma f_i) = I(f_i) \quad \text{si} \quad \sigma \in {}^c\tilde{\mathcal{K}}$$
$$I(\sigma f_i) = \overline{I(f_i)} \quad \text{si} \quad \sigma \in \operatorname{Aut}\tilde{\mathcal{G}} \div {}^c\tilde{\mathcal{K}}$$

(A strictement parler, c'est la fonction $|I|$ *seule qui est un véritable invariant).*

Nous commencerons dans ce paragraphe par l'étude des 2 -invariants, ou invariants mixtes binaires, sur le groupe $\tilde{\mathcal{G}}$
<u>*Les démonstrations sont toutes reportées en fin de paragraphe*</u>*.*

Signalons d'emblée que dans la suite chaque fois qu'une série formelle sera portée à une puissance complexe , on supposera le calcul effectué selon les règles habituelles. Le résultat sera une série formelle précédée d'un facteur scalaire déterminé à $e^{q2\pi i c}$ *près et éventuellement d'un facteur symbolique* z^{rc} *(* q *et* r *entiers). Ainsi, pour* $\Delta_k \neq 0$, $(\Delta_k z^k + \Delta_{k+1} z^{k+1} + \dots)^c$ *désignera* $\Delta_k^c z^{kc} (1 + \Delta_{k+1}\Delta_k^{-1} z + \dots)^c$ *où* Δ_k^c *est une détermination quelconque de* $\exp(c\log\Delta_k)$ *et où :*
$(1 + \Delta_{k+1}\Delta_k^{-1} z + \dots)^c = (1 + X(z))^c$, *désignant par là la série formelle :* $1 + c\,X(z) + \frac{c(c-1)}{2} X^2(z) + \dots$

On raisonnera tout au long du présent paragraphe sur un couple d'éléments $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *, de valuations itératives* p *et* $q < \infty$ *. Autrement dit :*

$$\tilde{f}(z) = z + a_p z^{p+1} + \dots \; ; \; \tilde{g}(z) = z + b_q z^{q+1} + \dots \quad (a_p \neq 0,\ b_q \neq 0)$$
$$\tilde{f}_*(z) = \alpha_p z^{p+1} + \dots \; ; \; \tilde{g}_*(z) = \beta_q z^{q+1} + \dots \quad (\alpha_p = a_p,\ \beta_q = b_q)$$

En outre, on supposera partout que $\tilde{f} \circ \tilde{g} \neq \tilde{g} \circ \tilde{f}$*, ou, ce qui revient au même, qu'aucune de ces deux transformations n'est* itérée(générale) de l'autre. Enfin, lorsque $p=q$, on définit l'entier ε par la condition (1) :

(1) $$\tilde{g}_*(z) / \tilde{f}_*(z) = -c_0 + c_\varepsilon z^\varepsilon + \ldots \quad (c_0 \neq 0,\ c_\varepsilon \neq 0)$$

ou par la condition équivalente (1 bis) :

(1 bis) $$(\tilde{g}(z) - z) / (\tilde{f}(z) - z) = d_0 + d_\varepsilon z^\varepsilon + \ldots \quad (d_\varepsilon \neq 0)$$

Nous sommes alors à même d'introduire nos invariants binaires de $\tilde{\mathcal{G}}$:

<u>Définition 1</u> : On se donne deux complexes a et b et on pose $n = pa + qb$ lorsque $p \neq q$ et $n = (p+\varepsilon)(a+b)$ lorsque $p = q$. Lorsque $n = n(a,b)$ est un entier, si on pose

$$\tilde{S} = \tilde{f}_*^{\,b-1}\ \tilde{g}_*^{\,a-1}\ [\tilde{f}_*, \tilde{g}_*]^{1-a-b}$$

, $\tilde{S}$ est une série formelle, calculable d'après la règle ci-dessus, et ne comportant pas en facteur de puissance non entière (relative) de z. On désigne par $I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g})$ le coefficient de z^{-1} de cette série. De plus, et lorsque $p \neq q$ seulement, on définit les nombres $I\left\langle {c \atop n} \right\rangle (\tilde{f},\tilde{g})$, pour c complexe et n entier relatif, par :

$$I\langle a,b\rangle = I\left\langle {c = a+b \atop n = pa+qb} \right\rangle$$

<u>Remarque 1</u> : On note que :

$$I\langle 1,0\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{Résit}\,\tilde{f} \quad \text{et} \quad I\langle 0,1\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{Résit}\,\tilde{g}$$

<u>Remarque 2</u> :

(α) Si a et b sont complexes, $I\langle a,b\rangle$ est défini à un facteur $\exp[2\pi i(n_1 a + n_2 b)]$ près (n_1 et $n_2 \in \mathbb{Z}$)

(β) *Si* a *(et par suite* b *) est réel,* $I\langle a,b\rangle$ *a un module défini sans ambiguité.*

(γ) *Si* a *et* b *sont entiers chacun,* $I\langle a,b\rangle$ *lui-même est défini sans ambiguité.*

Remarque 3 : Dans la suite, lorsque nous indiquerons des relations entre les différents $I\langle a,b\rangle$ *relatifs à un même couple* $(\tilde{f},\tilde{g})$ *ou lorsque nous formerons des fonctions génératrices à l'aide de ces* $I\langle a,b\rangle$*, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit des* $I\langle a,b\rangle$ *calculés à partir de déterminations fixes de log* a_p *et log* b_q *.*

Remarque 4 : On note pour finir que $I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g})$ *est identiquement nul en* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *si et seulement si* $n<0$ *lorsque* $p\neq q$ $($*resp.* $n<\varepsilon$ *lorsque* $p=q)$.

Théorème 1 : Les $I\langle a,b\rangle$ *et les* $I\langle {c \atop n}\rangle$ *sont invariants au sens qui vient d'être indiqué plus haut. En particulier, pour tout* $\tilde{h}$ *de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *on a :*

$$I\langle a,b\rangle\left(\tilde{h}^{\circ(-1)}\circ\tilde{f}\circ\tilde{h}\,,\,\tilde{h}^{\circ(-1)}\circ\tilde{g}\circ\tilde{h}\right)=I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g})$$

Attention : dans le cas général cette identité n'est vraie qu'à un facteur exp$[2\pi i\,(n_1 a+n_2 b)]$ *près* $(n_1$ et $n_2\in\mathbb{Z})$.

Définition 2 : On se fixe une fois pour toutes une détermination de log a_p *et de log* b_q *, à l'aide desquelles on calcule les différents* $I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g})$ *et* $I\langle {c \atop n}\rangle(\tilde{f},\tilde{g})$ *. On désigne alors par Inv* $\langle\cdot\cdot\rangle$ *l'ensemble de tous les* $I\langle a,b\rangle$ *; par Inv*$\langle {c \atop \cdot}\rangle$ $($*resp Inv* $\langle a\,\cdot\rangle$ *et Inv* $\langle\cdot\,b\rangle)$ *l'ensemble de tous les* $I\langle a,b\rangle$ *où le paramètre* c $($*resp* a *ou* $b)$ *est fixé. Enfin, on ajoute à chacun de ces systèmes les invariants valit* $\tilde{f}$ *et valit* $\tilde{g}$ *, et aussi,*

lorsque $p = q$, l'invariant $J(\tilde{f}, \tilde{g}) = a_p^{-1} b_q$, dit "exceptionnel".
On note que pour toute valeur de c, a ou b, les ensembles Inv $\langle {c \atop \cdot} \rangle$ Inv$\langle a\ .\rangle$ et Inv$\langle .\ b\rangle$ sont des ensembles dénombrables, à cause de la condition astreignant $n = n(a,b)$ à parcourir $\mathbb{Z}$.

On a donné dans (B, I, § 1) la définition de la liberté et de la complétude d'un système d'invariants, purs ou mixtes. Plus concrètement, la liberté d'un système traduit l'indépendance de ses différents éléments, tandis que la complétude d'un système exprime que celui-ci contient assez d'éléments pour permettre de reconstituer par le calcul tout autre invariant (attaché aux éléments considérés du groupe).

Théorème 3 : Pour toute paire $(\tilde{f}, \tilde{g})$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{G}}$, le système Inv$\langle ..\rangle$ formé des invariants binaires $I\langle a, b\rangle(\tilde{f}, \tilde{g})$ (dits "invariants fondamentaux") est complet, mais surabondant (i.e. non libre).

Les ensembles dénombrables Inv$\langle a .\rangle$ et Inv$\langle . b\rangle$ sont chacun des systèmes complets et libres d'invariants binaires si $a \neq 0$ (resp. $b \neq 0$) . Enfin, Inv$\langle {c \atop \cdot} \rangle$ est un système complet et libre si $p \neq q$, et dégénéré (i. e. non complet) si $p = q$.

Corollaire du théorème 3 : Les énoncés ci-dessus relatifs à la complétude des systèmes Inv expriment en particulier ceci :

Etant donné deux paires $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)$ et $(\tilde{f}_2, \tilde{g}_2)$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{G}}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $\tilde{k}$ de $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que ${}^c\tilde{k}.\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ et ${}^c\tilde{k}.\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$ (resp. ${}^c\tilde{k}(\overline{\tilde{f}_1}) = \tilde{f}_2$ et ${}^c\tilde{k}(\overline{\tilde{g}_1}) = \tilde{g}_2$) est que pour un certain complexe $a \neq 0$ (et par suite pour tout $a \neq 0$) les systèmes d'inva-

riants Inv $\langle a\,\cdot\rangle(\tilde{g}_1, \tilde{g}_1)$ *et Inv* $\langle a\,\cdot\rangle(\tilde{g}_2, \tilde{g}_2)$ *(resp. les systèmes Inv* $\langle a\,\cdot\rangle(\tilde{g}_1,\tilde{g}_1)$ *et* $\overline{[\mathrm{Inv}\langle a\,\cdot\rangle(\tilde{g}_2,\tilde{g}_2)]}$*) soient identiques. Mêmes énoncés avec b et c, bien sûr.*

En vertu de la surabondance du système Inv $\langle\cdot\,\cdot\rangle$ *et de la complétude des systèmes Inv* $\langle a\,\cdot\rangle$*, Inv* $\langle\cdot\, b\rangle$ *et Inv* $\langle \overset{c}{\cdot}\rangle$ *il doit être possible de calculer tout invariant binaire, et en particulier tout élément* $I\langle a,b\rangle$ *de Inv* $\langle\cdot\,\cdot\rangle$*, à partir de la donnée de l'un quelconque des systèmes Inv* $\langle a\,\cdot\rangle$*, Inv* $\langle\cdot\, b\rangle$ *ou Inv* $\langle \overset{c}{\cdot}\rangle$ *(si* $a\neq 0$*,* $b\neq 0$ *ou* $c\neq 0$ *et* $p=q$ *). Nous allons indiquer un théorème qui permet effectivement ce calcul. Pour ce faire, il est commode d'introduire certaines fonctions génératrices* $\mathcal{J}(\theta)$ *, de la variable formelle* θ *, à l'aide des invariants* $I\langle a,b\rangle$*. C'est l'objet de la*

__Définition 3__ :

Lorsque $p<q$ *(le cas* $p>q$ *s'y ramène) on pose :*

(2) $$\mathcal{J}\langle a\,\cdot\rangle(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a\,(a(q-p)+n)^{-1}\, I\langle a,(n-pa)q^{-1}\rangle\, \theta^n$$

(3) $$\mathcal{J}\langle\cdot\, b\rangle(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b\,(b(q-p)-n)^{-1}\, I\langle (n-qb)p^{-1}, b\rangle\, \theta^n$$

(4) $$\mathcal{J}\langle \overset{c}{\cdot}\rangle(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q-p)^{-1}\, I\langle \overset{c}{n}\rangle\, \theta^n$$

et lorsque $p=q$ *on pose*

$$\left.\begin{aligned}
&(5)\quad \mathcal{J}\langle a\,\cdot\rangle(\theta) = J^{a} + \sum_{n=\varepsilon}^{+\infty} a n^{-1}\, I\langle a, n(p+\varepsilon)^{-1}-a\rangle\, \theta^n \\
&(6)\quad \mathcal{J}\langle\cdot\, b\rangle(\theta) = J^{-b} + \sum_{n=\varepsilon}^{+\infty} b n^{-1}\, I\langle n(p+\varepsilon)^{-1}-b, b\rangle\, \theta^n
\end{aligned}\right\}\ \text{avec } J=a_p^{-1}b_q$$

Dans ces conditions on obtient entre les fonctions génératrices $\mathcal{J}(\theta)$ *ci-dessus les relations désirées qui permettent le calcul des* $I\langle a,b\rangle$ *à partir d'un système libre. En effet:*

Théorème 4 : *Pour toutes valeurs non nulles des paramètres complexes* a, a', b, b', c *et* c' , *on a (dans tous les cas)* :

$$(7)\quad \daleth\langle a\,\cdot\rangle(\theta) = \left\{\daleth\langle a'\cdot\rangle(\theta)\right\}^{a/a'} = \left\{\beta(\theta)\right\}^{a} \text{ avec } \beta(\theta)=\daleth\langle 1\cdot\rangle(\theta)$$

$$(8)\quad \daleth\langle\cdot\, b\rangle(\theta) = \left\{\daleth\langle\cdot\, b'\rangle(\theta)\right\}^{b/b'} = \left\{\alpha(\theta)\right\}^{b} \text{ avec } \alpha(\theta)=\daleth\langle\cdot 1\rangle(\theta)$$

De plus, et dans le cas où valit $\mathfrak{f}=p \neq$ *valit* $\mathfrak{g}=q$, *on a* :

$$(9)\quad \daleth\langle\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{\cdot}\rangle(\theta) = \left\{\daleth\langle\genfrac{}{}{0pt}{}{c'}{\cdot}\rangle(\theta)\right\}^{c/c'} = \left\{\gamma(\theta)\right\}^{c} \text{ avec } \gamma(\theta)=\daleth\langle\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{\cdot}\rangle(\theta)$$

Théorème 4 bis : *Les fonctions génératrices* α, β *et* γ *sont liées par*

$$(10)\quad \alpha\left\{\theta\,\gamma^{-1/p}(\theta)\right\} = \gamma^{1-(q/p)}(\theta) \text{ et } \beta\left\{\theta\,\gamma^{-1/q}(\theta)\right\} = \gamma^{1-(p/q)}(\theta)$$

(γ *n'est défini, et ces relations n'ont de sens, que si* $p\neq q$)

Théorème 4 ter :

Les fonctions génératrices α , β *et* γ *attachées au couple* $\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{ou}, \tilde{\mathfrak{g}}^{ov}\right)$, *se déduisent comme suit des fonctions correspondantes attachées au couple* $\left(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{g}}\right)$:

$$(11)\quad \alpha_{\tilde{\mathfrak{f}}^{ou},\tilde{\mathfrak{g}}^{ov}}(\theta) = u^{q/p}\, v^{-1}\ \alpha_{\tilde{\mathfrak{f}},\tilde{\mathfrak{g}}}\left(u^{-1/p}\,\theta\right)$$

$$(12)\quad \beta_{\tilde{\mathfrak{f}}^{ou},\tilde{\mathfrak{g}}^{ov}}(\theta) = u^{-1}\, v^{p/q}\ \beta_{\tilde{\mathfrak{f}},\tilde{\mathfrak{g}}}\left(v^{-1/q}\,\theta\right)$$

$$(13)\quad \gamma_{\tilde{\mathfrak{f}}^{ou},\tilde{\mathfrak{g}}^{ov}}(\theta) = u^{q/(p-q)}\, v^{p/(q-p)}\ \gamma_{\tilde{\mathfrak{f}},\tilde{\mathfrak{g}}}\left(\left(u/v\right)^{1/(q-p)}\,\theta\right)$$

Applications aux sous-groupes $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$.

On a défini en (A, II, §1) les sous-groupes $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *et les ensembles* $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$, *formés des éléments pleinement itérables de* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$.

Les théorèmes 4, 4 bis et 4 ter ci-dessus montrent que si l'une quelqonque des fonctions génératrices (non dégénérées) attachées à deux éléments $(\tilde{f}, \tilde{g})$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *, appartient à une certaine classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Delta_n\}$*, pour une suite* Δ_n *de type* $\mathcal{R}$ (Cf A-II-§1)*, alors il en est de même de toutes les autres fonctions génératrices attachées à ce même couple* $(\tilde{f}, \tilde{g})$*, et aussi des fonctions génératrices attachées au couple* $(\tilde{f}^{\circ u}, \tilde{g}^{\circ v})$ $(\forall u \text{ et } v \in \mathbb{C})$.

Toutefois :

<u>Théorème 5</u> :

a) Pour $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *éléments de* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$*, les différentes fonctions génératrices* $\mathcal{J}(\theta)$ *sont de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{n\Gamma_n\}$ *, mais ne sont pas en général de classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$.

b) Une condition nécessaire et suffisante pour que l'une de ces fonctions génératrices non dégénérées (et par suite toutes les autres) soit de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ *est qu'il existe un* σ *de Aut* $\tilde{\mathcal{G}}$ *tel que* $\sigma\tilde{f}$ *et* $\sigma\tilde{g}$ *appartiennent tous deux à* $I\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *, c'est-à-dire soient tous deux des éléments pleinement itérables du groupe* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *. Dans ce cas l'automorphisme* σ *peut être choisi de la forme* ${}^c\tilde{h} : \tilde{f} \to \tilde{h}^{\circ(-1)} \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}$ *avec* $\tilde{h}$ *appartenant à* $\tilde{\mathcal{H}}\{n\Gamma_n\}$*, mais pas nécessairement à* $\mathcal{H}\{\Gamma_n\}$.

Ainsi, par exemple, pour chacun des couples

$$\left\{ \tilde{f}(z) = z(1-z)^{-1} ; \tilde{g}(z) = z + z^2 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{f}(z) = z(1-z)^{-1} ; \tilde{g}(z) = z\,e^{z} \right\}$$

d'éléments de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$ *on peut montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme* σ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ *, et a fortiori de* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Delta_n \equiv n\}$ *tel que* $\sigma\tilde{f}$ *et* $\sigma\tilde{g}$ *soient simultanément pleinement itérables dans* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$.

Dans ce cas là, on peut même montrer que les fonctions génératrices $\mathcal{J}(\theta)$ *(non dégénérées) n'appartiennent à aucune classe* $\tilde{\mathcal{C}}\{\Delta'_n\}$

strictement incluse dans $\tilde{\mathcal{C}}\{\Delta_n \equiv n\}$.

Corollaire du théorème 5 :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\tilde{f}$ de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ soit pleinement itérable (dans $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$) est que l'une (et par suite chacune) des $\mathcal{J}_{\tilde{f},\tilde{g}}(\theta)$ non dégénérées soit de classe $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_n\}$ pour un (et par suite tout) élément $\tilde{g}$ pleinement itérable de $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$.

On a là un critère de pleine itérabilité qui s'ajoute à celui du théorème 7 dans le cas particulier du groupe $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n \equiv 1\}$ isomorphe au groupe $\mathcal{G}_k$.

Indications sur la démonstration des théorèmes 1, 2, 3, 4 et 5.

A propos du théorème 1 :

Sous l'effet d'un automorphisme de $\tilde{\mathcal{G}}$ de la forme ${}^{c}\tilde{k}$, nous avons :

$$\tilde{f} \to \tilde{k}^{\circ(-1)} \circ \tilde{f} \circ \tilde{k} \quad ; \quad \tilde{f}_* \longrightarrow (\tilde{f}_* \circ \tilde{k}) / \tilde{k}'$$

$$[\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] \longrightarrow [\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] \circ \tilde{k} / \tilde{k}' \quad \text{et enfin}$$

(14) $$\tilde{S} = \tilde{f}_*^{\,b-1}\, \tilde{g}_*^{\,a-1}\, [\tilde{f}_*, \tilde{g}_*]^{1-a-b} \longrightarrow \tilde{S} \circ \tilde{k} / \tilde{k}'$$

et (14) montre bien que le coefficient de z^{-1} dans $\tilde{S}(z)$ est un "invariant" (au sens que nous donnons à ce mot dans le présent chapitre).

A propos du théorème 2 :

C'est une conséquence immédiate des relations :

$$\left(\tilde{f}^{\circ u}\right)_* = u\, \tilde{f}_* \quad \text{et} \quad \left(\tilde{g}^{\circ v}\right)_* = v\, \tilde{g}_* \qquad \text{qui entraînent :}$$

$$\tilde{S}(z) \longrightarrow u^{-a}\, v^{-b}\, \tilde{S}(z)$$

A propos des théorèmes 3, 4, 4 bis et 4 ter:

Pour démontrer ces résultats, nous aurons besoin du

Lemme 1 : Soient $\tilde{h}$ et $\tilde{k}$ deux éléments de $\tilde{\mathcal{H}}$ inverses l'un de l'autre, et posons, pour tous m et n entiers relatifs :

$$(\tilde{h})^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{m,n} z^n \quad \text{et} \quad (\tilde{k})^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_{m,n} z^n$$

Alors $\begin{cases} h_{m,n} = \dfrac{m}{n} k_{-n,-m} & \text{si } n \neq 0. \\ \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{m,0} z^{-m-1} = k'(z)/k(z) & \text{si } n = 0. \end{cases}$

Ce lemme, dû à E. Jabotinsky, se trouve dans [21].

Sa démonstration est aisée ; on peut par exemple partir de l'identité $d\left\{\tilde{h}^m(z)\, z^{-n}\right\} = \tilde{h}^m(z)\, dz^{-n} + z^{-n}\, d\tilde{h}^m(z)$

et remarquer que :

$\begin{cases} \text{dans } d\left\{\tilde{h}^m(z)\, z^{-n}\right\} \text{ le coefficient de } z^{-1}dz \text{ est nul} \\ \text{dans } \tilde{h}^m(z)\, dz^{-n} \text{ le coefficient de } z^{-1}dz \text{ est égal à } (-n\, h_{m,n}) \\ \text{dans } z^{-n}\, d\tilde{h}^m(z) \text{ et dans } \tilde{k}^{-n}(z)\, dz^m \text{ les coefficients de } z^{-1}dz \\ \text{sont égaux et valent } (m\, k_{-n,-m}). \end{cases}$

Soit : $\quad 0 = -n\, h_{m,n} + m\, k_{-n,-m}.$

Grâce à ce lemme, et avant même d'examiner le théorème 3, nous allons démontrer le théorème 4 dans ses différents cas.

Dans les différents cas à traiter, nous profiterons des propriétés d'invariance (plus exactement : de ${}^c\tilde{\mathcal{H}}$-invariance) des $I\langle a,b\rangle$ et des $I\langle {}^c_n\rangle$ pour raisonner non pas sur le couple $(\tilde{f},\tilde{g})$ donné, mais sur un couple $(\tilde{f}_*,\tilde{g}_*) = ({}^c\tilde{l}.\tilde{f},\ {}^c\tilde{l}.\tilde{g})$ où $\tilde{l}$ sera un élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ judicieusement choisi.

Si l'on pose $\quad \tilde{h}(z) = -\tilde{g}_*(z)/\tilde{f}_*(z)$ et $\tilde{k}(z) = -\tilde{g}_*(z)/\tilde{f}_*(z)$

nous aurons $\tilde{k} = \tilde{h} \circ \tilde{\ell}$, et à cause de l'hypothèse $\tilde{f} \circ \tilde{g} \neq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ on voit que $\tilde{h}$, et par suite aussi $\tilde{k}$, n'est pas constante.

Enfin, puisque $[\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] = \tilde{h}' \, \tilde{f}_*^2$ et $[\tilde{f}_*, \tilde{g}_*] = \tilde{k}' \, \tilde{f}_*$ nous aurons, en application de la définition 1 :

(15) $$I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{coefficient de } z^{-1} \text{ dans} \left\{ \tilde{f}_*^{-a-b} \, \tilde{k}^{a-1} \, \tilde{k}'^{\,1-a-b} \right\}$$

<u>Cas où $p < q$</u> :

Dans ce cas nous avons $\tilde{h}(z) = \underline{\tilde{\mathcal{O}}}(z^{q-p})$ et il est donc possible de choisir un $\tilde{\ell}$ tel que $\tilde{k}(z) = z^{q-p}$.

Alors, d'après (15) :

(16) $$I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{coefficient de } z^{-1} \text{ dans} \left\{ (q-p)^{1-a-b} \, \tilde{f}_*^{-a-b} \, z^{1+a+b-(q-p)b} \right\}$$

Posons : $$\gamma(z) = (q-p)^{-1} \, \tilde{f}_*^{-1}(z) \, z^{1+p}$$

Alors (16) s'écrit :

$$I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{coefficient de } z^{-1} \text{ dans} \left\{ (q-p) \gamma^{a+b}(z) \, z^{-1} z^{-pa-qb} \right\}$$

Mais on rappelle que $a+b = c$ et $n = pa+qb$. Par suite :

$$I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = I\langle {c \atop n}\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = (q-p)\,\gamma_{c,n}$$

(où l'on pose, bien sûr, $\gamma^c(z) = \sum \gamma_{c,n} z^n$).

Donc si l'on définit, pour $c \neq 0$, les fonctions $J\langle {c \atop \cdot}\rangle$ de la variable formelle θ par

$$J\langle {c \atop \cdot}\rangle(\theta) = (q-p)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} I\langle {c \atop n}\rangle \theta^n$$ nous aurons :

$$J\langle {c \atop \cdot}\rangle(\theta) = [\gamma(\theta)]^c$$, ce qui établit (9).

Posons maintenant : $$\tilde{B}(z) = \left\{ (q-p) \, z^{q-p-1} \, \tilde{f}_*(z) \right\}^{1/q}$$

On vérifie que $\widetilde{B}$ est un élément de $\widetilde{\mathcal{K}}$, et on désigne par $\widetilde{\mathcal{B}}$ son inverse dans $\widetilde{\mathcal{K}}$. La relation (16) s'écrit alors :

$$I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{coéfficient de } z^{-1} \text{ dans } \left\{(q-p)\, \widetilde{B}^{-q(a+b)}(z) \quad z^{(q-p)a-1}\right\}$$

D'où (avec des notations $B_{m,n}$ et $\mathcal{B}_{m,n}$ conformes au lemme 1) :

$$(q-p)^{-1}\; I\langle a,b\rangle = B_{-q(a+b),\,-(q-p)a}$$

et donc :

$$(17) \qquad \mathcal{B}_{\sigma,m} = \frac{\sigma}{\tau}\, B_{-\tau,-\sigma} = \frac{\sigma}{\tau}\,\frac{1}{(q-p)}\, I\left\langle \frac{\sigma}{q-p}\,,\, \frac{\tau}{q} - \frac{\sigma}{q-p}\right\rangle$$

Finalement, si on définit pour $a \neq 0$ la fonction $\mathcal{J}\langle a\,\cdot\rangle$ de la variable formelle θ par :

$$\mathcal{J}\langle a\,\cdot\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a\,(a(q-p)+n)^{-1}\; I\langle a;\, (n-pa)\,q^{-1}\rangle\, \theta^{n}$$

on voit, d'après (17) que $\mathcal{J}\langle a\,\cdot\rangle = \left[\theta^{-1}\,\widetilde{\mathcal{B}}(\theta)\right]^{\sigma}$ pour $\sigma = a(q-p)$ ce qui établit l'identité (7) dans le cas $q>p$.

L'identité (8), enfin, dans ce même cas $(q>p)$ se démontre d'une manière tout analogue.

<u>Cas où $p=q$</u>.

Par définition de l'entier ε, on a :

$$\tilde{h}(z) = -\tilde{g}_*(z)\,/\,\tilde{f}_*(z) = c_0 - c_\varepsilon\, z^{\varepsilon} + \ldots \quad (c_0 \text{ et } c_\varepsilon \neq 0)$$

On peut donc choisir $\tilde{\ell}$ dans $\widetilde{\mathcal{K}}$ de manière que $\tilde{k}(z) = c_0\,(1+z^{\varepsilon})$. Dans ces conditions, (16) s'écrit :

$$(18)\; I\langle a,b\rangle(\tilde{f},\tilde{g}) = \text{coéfficient de } z^{-1} \text{ dans } \left\{\tilde{f}_*^{\,-a-b}\; c_0^{-b}\; \varepsilon^{1-a-b}\; z^{(\varepsilon-1)(1-a-b)}\,(1+z^{\varepsilon})^{a-1}\right\}$$

Définissons un élément $\widetilde{B}$ de $\widetilde{\mathcal{K}}$ par :

$$\widetilde{B}(z) = \left\{c_0\;\varepsilon\; z^{\varepsilon-1}\; \tilde{f}_*(z)\right\}^{1/(\varepsilon+p)}$$

et désignons par $\widetilde{\mathcal{B}}$ l'élément de $\widetilde{\mathcal{K}}$ inverse de $\widetilde{B}$

(18) s'écrit alors :

$$I\langle a,b\rangle(\tilde{g},g) = \text{coefficient de } z^{-1} \text{ dans } \left\{ \varepsilon C_0^a z^{\varepsilon-1}(1+z^{\varepsilon})^{a-\varepsilon} \tilde{B}^{-(\varepsilon+p)(a+b)}(z) \right\}$$

Par suite, en posant : $\tilde{B}^m(z) = \sum B_{m,n} z^n$ et $\tilde{\mathcal{B}}^m(z) = \sum \mathcal{B}_{m,n} z^n$

$$\begin{cases} I\langle a,b\rangle = \varepsilon C_0^a \sum_{m=0}^{a-1} C_{a-1}^m B_{-r,-\varepsilon m-\varepsilon} \\ \text{avec} \quad r = (\varepsilon+p)(a+b) \end{cases}$$

<u>(si a est entier)</u>

Or d'après le lemme 1 : $B_{m,n} = \frac{m}{n} \mathcal{B}_{-n,-m}$ et par suite :

$$I\langle a,b\rangle = \varepsilon C_0^a \sum_{m=0}^{a-1} C_{a-1}^m \frac{r}{\varepsilon m+\varepsilon} \mathcal{B}_{\varepsilon+\varepsilon m, r}$$

Si donc on définit pour $a \neq 0$ une fonction $\mathcal{L}_a(\theta)$ de la variable formelle θ par :

$$\mathcal{L}_a(\theta) = \sum_{r=\varepsilon}^{\infty} I\langle a, b(r)\rangle \theta^r \quad \text{avec} \quad b(r) = \frac{r}{p+\varepsilon} - a$$

nous aurons si <u>a est entier</u> :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a(\theta) &= \varepsilon C_0^a \sum_{m=0}^{a-1} C_{a-1}^m \sum_{r=\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\varepsilon m+\varepsilon} \mathcal{B}_{\varepsilon+\varepsilon m, r} \theta^r \\ &= \varepsilon C_0^a \sum_{m=0}^{a-1} \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon m} C_{a-1}^m \theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\tilde{\mathcal{B}}(\theta)\right]^{\varepsilon+\varepsilon m} \\ &= \varepsilon C_0^a \sum_{m=0}^{a-1} C_{a-1}^m \theta \tilde{\mathcal{B}}'(\theta) \tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon+\varepsilon m-1}(\theta) \\ &= \varepsilon C_0^a \theta \tilde{\mathcal{B}}'(\theta) \tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon-1}(\theta) \left[1+\tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}(\theta)\right]^{a-1} \\ &= C_0^a a^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left[1+\tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}(\theta)\right]^a \end{aligned}$$

Par suite, si nous posons :

$$\mathcal{J}\langle a.\rangle(\theta) = \left[C_0\left(1+\tilde{\mathcal{B}}^{\varepsilon}(\theta)\right)\right]^a = C_0^a + a\int_0^{\theta} \mathcal{L}_a(t)\, t^{-1}\, dt$$

la relation (7) du théorème 4 est encore vérifiée et nous avons :

$$\mathcal{J}\langle a.\rangle(\theta) = J^a + \sum_{n=\varepsilon}^{\infty} \frac{a}{n} I\langle a, \frac{n}{p+\varepsilon} - a\rangle \theta^n \quad \text{avec} \quad J = C_0 = b_p/a_p$$

Cette démonstration, valable pour les a *entiers, s'étend en fait à des* a *quelconques non nuls.*

Enfin, la relation (δ), *relative à* $\mathfrak{J}\langle\cdot\, b\rangle(\theta)$ *se démontre d'une manière exactement identique.*

A propos des théorèmes 4 bis et 4 ter :

Le théorème 4 bis n'a de sens que lorsque $p \neq q$. *Supposons* $p<q$. *Dans ce cas nous avons :* $\gamma(\theta) = (q-p)^{-1}\,\tilde{f}_*^{-1}(\theta)\,\theta^{p+1}$

$$\tilde{f}(\theta) = \theta(q-p)^{-1}\tilde{A}^{p}(\theta) \quad ; \quad \theta[\alpha(\theta)]^{-\frac{1}{q-p}} = \tilde{\mathcal{A}}(\theta) \quad ; \quad \tilde{\mathcal{A}}\circ\tilde{A}(\theta) = \tilde{A}\circ\tilde{\mathcal{A}}(\theta) = \theta$$

D'où l'on tire la relation $\alpha\left\{\theta\,\gamma^{-(1/p)}(\theta)\right\} = \gamma^{1-(q/p)}(\theta)$ *par des combinaisons judicieuses. Quant à la seconde des relations (10), elle est exactement symétrique de celle-ci.*

Enfin, le théorème 4 ter est une simple conséquence des relations de définition de $\mathfrak{J}(\theta)$ *et des propriétés d'homogénéité itérative des* $I\langle a,b\rangle$ *(Voir théorème 2).*

A propos des théorèmes 3 et 5 :

La complétude des systèmes Inv $\langle a\,\cdot\rangle$, *Inv* $\langle\cdot\, b\rangle$ *et (si* $p \neq q$*) Inv* $\langle\dot{\underset{\cdot}{c}}\rangle$, *ou, ce qui revient au même, la complétude des systèmes d'invariants formés des coefficients de l'une quelconque des fonctions génératrices non dégénérées* $\mathfrak{J}(\theta)$, *tient à ce que la donnée d'une telle* $\mathfrak{J}(\theta)$ *équivaut — pour peu que l'on se fixe le rapport* $\tilde{k}(z) = -\tilde{g}_*(z)\,/\,\tilde{f}_*(z)$ *comme dans les démonstrations ci-dessus — à la donnée de* $\tilde{f}_*$ *et de* $\tilde{g}_*$, *qui elles-mêmes permettent de calculer* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$, *et donc de reconstituer tous les invariants binaires possibles liés à* $(\tilde{f},\tilde{g})$, *et donc aussi à* $(\tilde{f},\tilde{g})$.

Quant à la liberté des mêmes systèmes, elle résulte de la forme même des relations liant les $\mathfrak{J}(\theta)$ à $\tilde{f}_*(z)$.

En ce qui concerne enfin le théorème 5 et son corollaire, bornons-nous à indiquer qu'on le démontre en utilisant les théorèmes de (A, II) sur les classes $\tilde{\mathcal{C}}\{\Gamma_*\}$, en exploitant les relations liant les différentes $\mathfrak{J}(\theta)$ à $\tilde{f}_*$ et $\tilde{g}_*$ et en se souvenant de la manière dont un isomorphisme ${}^c\tilde{h}$ $({}^*\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{K}}^*)$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ affecte un logarithme itératif, à savoir :

$$\tilde{f}_* \to ({}^c\tilde{h} \,.\, \tilde{f})_* = \tilde{f}_* \circ \tilde{h} \,/\, \tilde{h}' .$$

§ 2 : INVARIANTS MIXTES GENERAUX DE $\tilde{\mathcal{G}}$.

On part d'un ensemble de n éléments de $\tilde{\mathcal{G}}$: $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$; on pose ρ_i = valit $\tilde{f}_i$ et on suppose pour simplifier que $\rho_i \neq \rho_j$ si $i \neq j$. On se donne en plus un système $\mathcal{A}$ de $(2^n - 1)$ complexes :

$A_i, A_{ij}, A_{ijk}, \dots, A_{12\dots n}$

(où $i, j \dots \in \{1, 2, \dots, n\}$) qui vérifient les relations $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ suivantes (avec $R_k = k(k-3)/2$) :

$$(\mathcal{C}_1) : R_1 \sum_i A_i + R_2 \sum_{i,j} A_{ij} + R_3 A_{ijk} + \dots + R_n A_{12\dots n} = 1$$

$$(\mathcal{C}_2) : \sum_i (-R_1 + \rho_i) A_i + \sum_{i,j} (-R_2 + \rho_i + \rho_j) A_{ij} + \dots + (-R_n + \rho_1 + \dots + \rho_n) A_{12\dots n} \in \mathbb{Z}$$

On définit ensuite le k-crochet de k séries, généralisant le bi-crochet de Lie.

<u>*Définition 4*</u> *: $\tilde{f}_{i*}$ désignant le logarithme itératif de $\tilde{f}_i$, on définit $[\tilde{f}_{1*}, \tilde{f}_{2*}, \dots, \tilde{f}_{k*}]$ comme étant égal au déterminant $k \times k$ dont la j-ième ligne est $\{\tilde{f}_{j*}, \tilde{f}'_{j*}, \tilde{f}''_{j*}, \dots \tilde{f}^{(k-1)}_{j*}\}$*

<u>*Définition 5*</u> *: Lorsque $\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, l'expression qui suit :*

$$(19) \quad \tilde{S} = \prod_i \tilde{f}_{i*}^{A_i} \prod_{i,j} [\tilde{f}_{i*}, \tilde{f}_{j*}]^{A_{ij}} \prod_{i,j,k} [\tilde{f}_{i*}, \tilde{f}_{j*}, \tilde{f}_{k*}]^{A_{ijk}} \dots [\tilde{f}_{1*}, \tilde{f}_{2*}, \dots, \tilde{f}_{n*}]^{A_{12\dots n}}$$

désigne une série formelle de z, calculable d'après la règle indiquée au début du paragraphe § 1 de ce chapitre.
Le coefficient de z^{-1} sera noté $I\langle\mathcal{A}\rangle(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n)$. C'est un nombre complexe, déterminé en général à un facteur $\exp[2\pi i \sum n_{ijk\dots} A_{ijk\dots}]$ près, et sans ambiguité dans le cas où les $A_{ijk\dots}$ sont tous entiers relatifs.

<u>*Théorème 6 :*</u>

Lorsque le système $\mathcal{A}$ *vérifie les conditions* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$*, les scalaires* $I\langle\mathcal{A}\rangle(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ *qu'ils permettent de définir, sont des invariants(**) mixtes de* $\tilde{\mathcal{G}}$*. A condition d'y joindre les* $p_i =$ *valit* $\tilde{f}_i$*, leur ensemble forme un système complet, mais surabondant, d'invariants du système* $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$.

De plus, les $I\langle\mathcal{A}\rangle$ *sont itérativement homogènes de degré* $(-a_i)$ *par rapport à l'exposant d'itération* w_i *de* f_i

Autrement dit :

$$I\langle\mathcal{A}\rangle(\tilde{f}_1^{\circ w_1}, \ldots, \tilde{f}_n^{\circ w_n}) = w_1^{-a_1} \ldots w_n^{-a_n}\, I\langle\mathcal{A}\rangle(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$$

Ici, les a_i *sont des complexes entièrement déterminables à partir de* $\mathcal{A}$.

<u>*Indications sur la démonstration du théorème 6 :*</u>

Bornons-nous ici à montrer le caractère invariant (plus exactement : ${}^c\tilde{\mathcal{K}}$*- invariant) des* $I\langle\mathcal{A}\rangle$.

Celui-ci va résulter des propriétés des k *-crochets* $[\tilde{f}_{1*}, \tilde{f}_{2*}, \ldots, \tilde{f}_{k*}]$ *introduits à la définition (4).*

Ce k *-crochet est aussi égal au déterminant* D *dont la* j-ième *colonne est* $\begin{bmatrix} \tilde{f}_{1*}^{(j-1)} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{k*}^{(j-1)} \end{bmatrix}$ *soit en abrégé* $\dfrac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\tilde{K}$.

Or un automorphisme primaire ${}^c\tilde{\ell}$ *de* $\tilde{\mathcal{G}}$ (*avec* $\tilde{\ell} \in \tilde{\mathcal{K}}$) *change chaque* $\tilde{f}_{i*}$ *en* $\tilde{f}_{i*} \circ \tilde{\ell} / \tilde{\ell}'$ *et par suite change*

(**) *A strictement parler : des* ${}^c\tilde{\mathcal{K}}$*-invariants : voir la convention de langage faite au § 1 de ce chapitre.*

$\frac{d^j}{dz^j}\tilde{K}$ en

$$\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{\tilde{K}\circ\tilde{\ell}}{\tilde{\ell}'}\right] = \left[\tilde{\ell}'\right]^{j-1}\left[\frac{d^j}{dz^j}\tilde{K}\right]\circ\tilde{\ell} + \sum_{r=0}^{r=j-1}\tilde{q}_{j,r}\left[\frac{d^r}{dz^r}\tilde{K}\right]\circ\tilde{\ell}$$

où le scalaire $\tilde{q}_{j,r}\ (=\tilde{q}_{j,r}(z))$ *ne dépend que de* j, r *et* $\tilde{\ell}$

Par suite le déterminant Δ *dont la* j-ième *colonne est* $\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left[\frac{\tilde{K}\circ\tilde{\ell}}{\tilde{\ell}'}\right]$ *est égal au déterminant dont la* j-ième *colonne est* $[\tilde{\ell}']^{j-2}\left[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\tilde{K}\right]\circ\tilde{\ell}$ *, c'est-à-dire au déterminant* $\tilde{\ell}'^{\frac{k(k-3)}{2}} D\circ\tilde{\ell}$.

En résumé, sous l'effet de l'automorphisme ${}^c\tilde{\ell}$:

$$D(z) \longrightarrow \Delta(z) = \left[\tilde{\ell}'(z)\right]^{R_k} D\circ\tilde{\ell}(z) \quad \text{avec } R_k = \frac{k(k-3)}{2}$$

Par suite, et compte tenu de la condition $\mathcal{C}_1$ *, l'effet de* ${}^c\tilde{\ell}$ *sur la série* $\tilde{S}(z)$ *de la définition 5 sera :*

$$(20) \qquad \tilde{S}(z) \longrightarrow \tilde{\Sigma}(z) = \tilde{\ell}'\ \tilde{S}\circ\tilde{\ell}$$

et la relation $\mathcal{C}_2$ *assure que* $\tilde{S}(z)$ *est bien une série formelle dont les exposants de* z *appartiennent tous à* $\mathbb{Z}$ *. Cela étant acquis, le* ${}^c\tilde{\mathcal{H}}$*-invariance du coefficient de* z^{-1} *dans* $\tilde{S}(z)$ *résulte de (20) (par un raisonnement simple sur les résidus).*

EXTENSIONS
QUESTIONS OUVERTES
CONCLUSION

§ 1) CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Les deux principaux groupes qui généralisent au cas de n variables complexes $(z_1, \dots, z_n) = Z$ le groupe $\mathcal{G}_k$ et qui donnent lieu à des théories itératives non triviales - et à des théories d'invariance holomorphe intéressantes - sont les groupes $\mathcal{G}_{k,n}$ et $\mathcal{G}_{\delta_{k,n}}$ ainsi définis :

$\mathcal{G}_{k,n}$ $\left(\underline{\text{resp.}}\ \mathcal{G}_{\delta_{k,n}}\right)$ est le groupe, pour la composition, des applications de la forme $f(Z) = \bar{\bar{f}}'(0) \cdot Z + o(|z_1| + \dots + |z_n|)$, où $\bar{\bar{f}}'(0)$ est la matrice unité d'ordre n (resp. : une matrice triangulaire supérieure ayant tous ses termes diagonaux égaux à 1).

On définit d'une manière analogue les groupes $\tilde{\mathcal{G}}_n$ et $\tilde{\mathcal{G}}_{\delta_n}$ de transformations formelles.

Au prix de complications assez considérables, la théorie itérative et la théorie de l'invariance holomorphe s'étendent aux groupes $\mathcal{G}_{k,n}$ et $\mathcal{G}_{\delta_{k,n}}$ et conduisent à des résultats parfois voisins de la théorie à une variable.

Toutefois, pour les groupes formels, il existe une différence capitale entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables ; en effet, alors que les scalaires valit et resit forment à eux deux un système complet d'inva-

riants simples de $\tilde{\mathcal{G}}$ *, tout système complet d'invariants simples de* $\tilde{\mathcal{G}}_n$ *ou de* $\tilde{\mathcal{G}}_n$ *est nécessairement infini (dénombrable) si* $n > 1$.

Signalons que pour construire ces derniers systèmes, il est commode d'utiliser le "symbole du résidu de Grothendieck" (usuellement employé dans la formule de Lefschetz du point fixe pour les applications holomorphes).

§ 2) CAS DES GROUPES $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ ET $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$. QUESTION DES INVARIANTS QUASI-ANALYTIQUES.

Il est naturel d'associer à chaque groupe formel $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *(cf A-II) le groupe* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *formé des germes* $\hat{f}$ *pour lesquels il existe un représentant* f *de* $\hat{f}$ *, un* $T>0$ *et un* $K>0$ *tels que :*

$$|f^{(n+1)}(t)| < (n+1)!\ \Gamma_n^n K^n \quad , \forall n \in \mathbb{N} \ , \forall t \in [0T]. \tag{1}$$

(Il existe d'ailleurs d'autres définitions possibles, et d'égal intérêt).

Lorsqu'en outre on impose à la suite $\{\Gamma_n\}$ *(déjà supposée de type régulier ; cf A-II-1) de vérifier la condition :*

$$\sum (n\Gamma_n)^{-1} = +\infty \tag{2}$$

alors les éléments de $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *sont des germes (en* 0 *, à droite) de fonctions quasi-analytiques au sens de Denjoy et dans ce cas* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *est noté de préférence* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *et ses éléments sont notés* f *,* g *etc ... (et non pas* $\hat{f}$ *,* $\hat{g}$ *..., bien que ce soient des germes, et en raison de l'unicité des représentants de ces germes).*

On note bien que l'homomorphisme naturel du groupe $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *dans le groupe* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *:*

$$\hat{f} \longrightarrow \tilde{f} \tag{3}$$

n'est en général pas un <u>*isomorphisme*</u> *(pas surjectif).*

En particulier il n'y a pas isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *et* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ $\left(= \mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}\right)$ *lorsque* $\{\Gamma_n\}$ *définit une classe* <u>*quasi-analytique*</u> *distincte de la classe analytique. Par exemple, si un élément* $\tilde{f}$ *de* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *n'est pas de classe analytique et a ses coefficients tous positifs, alors il n'est l'image par l'homomorphisme (3) d'aucun élément* f *de* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *(voir à ce sujet* [34] *et* [35]*). Cette dernière circonstance pose des difficultés, sérieuses mais surmontables, lors de l'extension de* <u>*la théorie itérative*</u> *aux groupes* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *et* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *.*

En revanche, nous n'avons pas encore pu étendre à ces groupes la théorie des <u>*invariants*</u> *(purs). C'est là une lacune importante, car on pressent bien, pour les groupes* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ <u>*une théorie des invariants quasi-analytiques*</u> *analogues aux invariants holomorphes construits pour* $\mathcal{G}_h$ *. La difficulté essentielle réside ici en l'absence d'"éléments itératifs sectoriels" se recouvrant deux à deux.*

Il y a là, semble-t-il, une série capitale de problèmes ouverts.

<u>§ 3) LES EXTENSIONS SUCCESSIVES DE $\mathcal{G}_h$ ET DES $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$. SOMMATION CANONIQUE DE CERTAINS DEVELOPPEMENTS DIVERGENTS.</u>

On désigne par $S\mathcal{G}_h$ *le semi-groupe formé des éléments* f *de* $\mathcal{G}_h$ *tels que le premier coéfficient non nul du développement* $\{\tilde{f}(z) - z\}$ *soit réel négatif. On définit de même les semi-groupes* $S\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *et* $S\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *à partir des groupes* $\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *et* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *.*

Désignons maintenant par $FS\mathcal{G}_h$ *(resp* $FS\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *ou* $FS\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$*) l'ensemble de toutes les itérées fractionnaires* <u>*d'indice 0*</u> *(resp. les itérées fractionnaires au sein du semi-groupe* $\hat{\mathcal{G}}$ *; cf A-I-3) et d'ordre* <u>*d'itération réel positif*</u> *des éléments de* $S\mathcal{G}_h$ *(resp. de* $S\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *ou* $S\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *).*

On désigne ensuite par $SFS\,\mathcal{G}_k$ *le semi-groupe (c'en est bien un) engendré en composant les éléments de* $FS\,\mathcal{G}_k$ *; et on fait la même chose pour les* $FS\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *et les* $FS\,\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$.

Enfin, on note que tout élément de $SFS\,\mathcal{G}_k$ *(resp. de* $SFS\hat{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *ou* $SFS\,\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *) est aussi élément d'un certain semi-groupe* $\mathcal{G}_{k-}(V,p,\infty)$ *pour un certain entier* p *et un certain secteur*(*) V *contenant la racine*(*) *du rayon* 0 *(resp. est aussi élément du semi-groupe* $\hat{\mathcal{G}}_-$ *; cf A-I-3) et ceci nous permet d'après A-III-2 (resp A-I-3) d'en prendre à nouveau l'itérée fractionnaire pour toute valeur réelle positive de l'ordre d'itération. On note* $FSFS\,\mathcal{G}_k$ *(resp, etc ...) les ensembles ainsi obtenus, puis* $SFSFS\,\mathcal{G}_k$ *(resp ...) les semi-groupes engendrés par chacun de ces ensembles.*

Ainsi, en partant en particulier du groupe holomorphe $\mathcal{G}_k$ *ou d'un groupe quasi-analytique* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *on aboutit à une infinité d'extensions successives* $SF\ldots SFS\,\mathcal{G}_k$ *et* $SF\ldots SFS\,\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *, qui sont des semi-groupes, dont les éléments* f *ont des images* $\tilde{f}$ *dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *(c'est-à-dire, des développements de Taylor à l'origine) qui en général n'appartiennent* <u>*pas*</u> *à* $\tilde{\mathcal{G}}\{1\}$ *ou à* $\tilde{\mathcal{G}}\{\Gamma_n\}$ *, mais qui toutefois appartiennent à une classe de Gevray, c'est-à-dire à* $\tilde{\mathcal{G}}\{n^\theta\}$ *, où* θ *dépend de* <u>*l'ordre*</u> *de l'extension envisagée.*

On a là un moyen de sommer d'une manière canonique et naturelle une classe très vaste de développements de Gevray divergents.

Signalons que l'étude des extensions successives de $\mathcal{G}_k$ *et des* $\mathcal{G}_{qa}\{\Gamma_n\}$ *- et surtout des extensions* <u>*transfinies*</u> *- pose des problèmes redoutables et qu'il reste beaucoup à faire.*

(*) *cf A-III-2.*

§ 4) FORMULES EXPLICITES EXPRIMANT LES ZEROS D'UNE FONCTION QUASI-ANALYTIQUE REELLE AU MOYEN DE SES COEFFICIENTS DE TAYLOR EN UN POINT DONNE.

En développant la théorie itérative dans les groupes d'automorphismes analytiques (resp.. quasi-analytiques) du segment $[0,1]$ on aboutit à des théorèmes dont voici un échantillon :

Théorème :

Etant donné une suite $\{\Gamma_n\}$ de type régulier (cf. A-II-1) et vérifiant en outre $\sum (n\Gamma_n)^{-1} = +\infty$, on note $\mathcal{C}_{qa}\{\Gamma_n\}$ la classe de fonctions quasi-analytiques associée (cf. les inégalités (1) ci-dessus). De plus φ désigne une fonction

(i) quasi-analytique de classe $\mathcal{C}_{qa}\{\Gamma_n\}$ sur un segment $[t_1, t_2]$

(ii) strictement positive sur $[t_1, t_2[$

(iii) s'annulant en t_2.

(iiii) dont le développement de Taylor en t_1 est noté $\tilde{\varphi}(z) = \sum \varphi_j z^j$.

Il existe une suite universelle de polynômes $Q_n(\varphi_j)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $Q_n(\ldots)$ est un polynôme en $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$.

(ii) les polynômes Q_n sont "universels" en ce sens que leurs coefficients ne dépendent que de $\{\Gamma_n\}$ (pas de φ !)

(iii) pour tous t_1, t_2 et φ satisfaisant aux conditions ci-avant on a :

$\lim Q_n(\varphi_k) = t_2$ quand $n \to \infty$.

N. B. Les Q_n sont parfaitement explicitables.

C'est là, croyons-nous, le premier exemple d'un procédé permettant le calcul explicite des zéros en fonction des coefficients de Taylor en un point donné. Notons que tout repose sur l'utilisation de la série formelle (formelle en z et w) : $$\Phi(z,w) = \sum_m \frac{w^m}{m!} \left(\sum_n \varphi_n z^n \frac{\partial}{\partial z} \right)^m . z,$$

et que ce procédé est susceptible d'extensions considérables au plan complexe, et sert parfois dans la recherche des zéros complexes de fonctions définies par des séries de Dirichlet.

§ 5) CONCLUSION.

Les résultats du présent travail, on l'a vu, s'obtiennent pour la plupart sans recours à aucune des théories de pointe des mathématiques modernes. Bien qu'on utilise ici et là certains lemmes assez spéciaux, bien qu'on se serve d'une forme explicite de la formule de Campbell-Hausdorff et bien qu'enfin, dans les développements ultérieurs qu'on vient d'esquisser, il faille recourir à la théorie des espaces de Baire, à certains résultats fins de la théorie des fonctions quasi-analytiques etc ... malgré tout cela le fait saillant demeure le côté classique des méthodes employées et des théories mises à contribution (parmi ces dernières, essentiellement et très banalement : l'analyse complexe à une variable).

Néanmoins on aboutit à une théorie non seulement riche en applications mais encore débouchant sur quantité de problèmes non encore résolus et dont certains semblent fort ardus. Ceci, joint au caractère "premier" ou "non dérivé" de notre théorie(**), nous renforce dans notre conviction qu'elle est susceptible de recevoir des développements considérables. Par exemple, et sans sortir du domaine de l'analyse complexe à une variable, il semble que cette théorie de l'invariance holomorphe revête une importance intrinsèque, et recèle des possibilités de croissance, au moins égales à un sujet tel que celui des "coefficients de Taylor des fonctions holomorphes univalentes dans le disque unité" - sujet

---

(**) *On est libre bien entendu d'y voir une vertu ou une imperfection !*

auquel sont pourtant consacrées chaque mois en moyenne 3 ou 4 publications nouvelles.

Nous serions donc comblés si le présent travail pouvait retenir l'attention d'autres chercheurs et servir de point de départ à des travaux approfondis sur la théorie des invariants holomorphes.

TABLEAU RESUMANT LE § 1 DU CHAPITRE B-II (Définition et principales propriétés des invariants holomorphes)

DEFINITIONS

$$\begin{cases} \Omega^{f}_{j,j'}(w) = f^{*j} \circ {}^{j'*}f(w) \\ \text{avec } \; j - j' = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{*j} \circ f(z) = 1 + f^{*j}(z) \\ f \circ {}^{j*}f(w) = {}^{j*}f(w+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{*(j+2p)}(z) = 2\pi i p + f^{*j}(z) \\ {}^{(j+2p)*}f(w) = {}^{j*}f(w + 2\pi i p) \end{cases}$$

$$\Pi_f(\varepsilon, k, w) = \Omega_f\left(\varepsilon, k, w + 2\pi i p \frac{k}{p}\right) - \left(w + 2\pi i p \frac{k}{p}\right)$$

$$\begin{cases} \Omega_f(1, k, w) = \Omega^{f}_{2k,2k+1}(w) & \text{si } \operatorname{Im} w \text{ est assez grand.} \\ \Omega_f(1, k, w) = \Omega^{f}_{2k,2k-1}(w) & \text{si } (-\operatorname{Im} w) \text{ est assez grand.} \\ \Omega_f(-1, k, w) = \Omega^{f}_{2k+1,2k}(w) & \text{si } \operatorname{Im} w \text{ est assez grand.} \\ \Omega_f(-1, k, w) = \Omega^{f}_{2k-1,2k}(w) & \text{si } (-\operatorname{Im} w) \text{ est assez grand.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega^{f}_{j,j'}(w) = w + \sum\limits_{n>0 \,(\text{resp} <0)} \Theta^{f}_{j,j',n}\, e^{2\pi i n w} \quad (j - j' = \pm 1) \\ \Omega_f(\varepsilon, k, w) = w + \sum\limits_{n>0 \,(\text{resp} <0)} \Theta_f(\varepsilon, k, n)\, e^{2\pi i n w} \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ \Pi_f(\varepsilon, k, w) = \sum\limits_{\ell} \sum\limits_{n} \dot{\Pi}_f(\varepsilon, \ell, n)\, e^{2\pi i \left(\frac{k\ell}{p} + n w\right)} \end{cases}$$

(ℓ parcourt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et n parcourt $+\mathbb{N}$ ou $-\mathbb{N}$)

PROPRIETES

$$\begin{cases} \Omega^{f}_{j,j'}(w+1) = 1 + \Omega^{f}_{j,j'}(w) \\ \Omega^{f}_{j+2p,\, j'+2p}(w) = 2\pi i p + \Omega^{f}_{j,j'}(w - 2\pi i p) \end{cases}$$

$$\Pi_f(\varepsilon, k + n_1 p, n_2 + w) = \Pi_f(\varepsilon, k, w)$$

$$\begin{cases} (\tau f)^{*j}(z) = C_1 + f^{*(j_1 + j)} \circ h(z) \\ (\sigma f)^{*j}(z) = C_2 + \overline{f^{*(j_2 - j)}} \circ h(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n) = \dot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)\,\dot{\Pi}_f(\varepsilon,-\ell,-n) \\ \ddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n) = \ddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)\,\overline{\left(\dddot{\Pi}_f(\varepsilon,-\ell,n)\right)} \end{cases}$$

Automorphismes τ et σ de $\mathcal{G}_h$:

$$\begin{cases} \tau : f \to \tau f = h^{\circ(-1)} \circ f \circ h \\ \sigma : f \to \sigma f = h^{\circ(-1)} \circ \bar{f} \circ h \end{cases}$$

$$\Theta^{f}_{j,j+\varepsilon;n} = \int_z^{f(z)} \left(f^{*j}(\zeta) - f^{*j+\varepsilon}(\zeta)\right) e^{-2\pi i n f^{*j+\varepsilon}(\zeta)} \, {f^{-1}_{*j+\varepsilon}}(\zeta)\, d\zeta$$

$(\varepsilon = \pm 1)$

Propriétés d'invariance ou de ${}^{c}\mathcal{K}_h$-invariance :

$$\Pi_{\tau f}(\varepsilon,k,w) = C_1 + \Pi_f(\varepsilon, k_1+k, w_1+w)$$

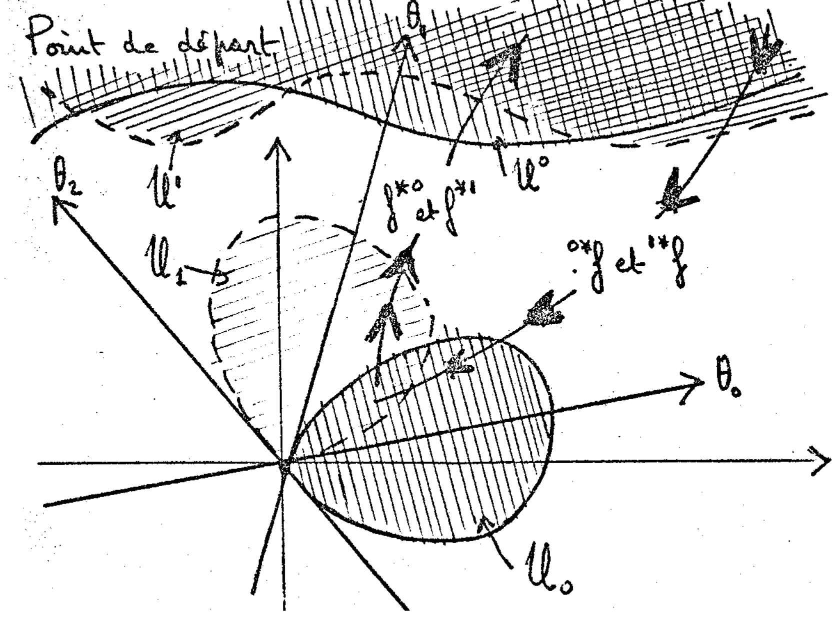
$$\Pi_{\sigma f}(\varepsilon,k,w) = C_2 + \overline{\Pi_f(\varepsilon, k_2-k, \overline{w_2+w})}$$

$$\ddot{\Pi}_{\tau f}(\varepsilon,\ell,n) = \ddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n) \;;\; \ddot{\Pi}_{\sigma f}(\varepsilon,\ell,n) = \ddot{\Pi}_f(\varepsilon,-\ell,n)$$

$$\dddot{\Pi}_{\tau f}(\varepsilon,\ell,n) = \dddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n) \;;\; \dddot{\Pi}_{\sigma f}(\varepsilon,\ell,n) = \dddot{\Pi}_f(\varepsilon,\ell,n)$$

si $n \geq 0$: $\begin{cases} \Theta_f(1,k,n) = \Theta^{f}_{2k,2k+1;n} \\ \Theta_f(-1,k,n) = \Theta^{f}_{2k+1,2k;n} \end{cases}$

si $n \leq 0$ $\begin{cases} \Theta_f(1,k,n) = \Theta^{f}_{2k+1,2k;n} \\ \Theta_f(-1,k,n) = \Theta^{f}_{2k-1,2k;n} \end{cases}$



Invariants et quasi-invariants auxiliaires :

les $\Omega(\varepsilon,k,w)$ et les $\Omega_{j,j'}(w)$, ainsi que leurs coefficients de Fourier (en w), à savoir : les $\Theta(\varepsilon,k,n)$ et les $\Theta_{j,j';n}$

Aboutissement :

Les "invariants" holomorphes définitifs, à savoir : Π, $\dot{\Pi}$, $\ddot{\Pi}$, $\dddot{\Pi}$

$$\begin{cases} \ddot{\Pi} \text{ est un } {}^{c}\mathcal{K}_h\text{-invariant de } \mathcal{G}_h \\ \dddot{\Pi} \text{ est un invariant de } \mathcal{G}_h \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

BAKER I. N.

[1] "Permutable power series and regular iteration"
J. Austr. Math. Soc. 2 (1961/62) pp 265-294.

[2] "Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1"
J. Austr. Math. Soc. 4 (1964) pp 143-148

[3] "Non embeddable functions with a fixpoint of multiplier 1"
Math. Zeitschrift. 99 (1967) pp 377-384.

ECALLE J.

a) 7 Notes aux Comptes Rendus Acad. Sc., série A, aux dates de :

[4] 18-1-1971

[5] 25-1-1971

[6] 01-2-1971

[7] 15-1-1973

[8] 22-1-1973

[9] 29-1-1973

[10] 05-2-1973

b)

[11] "Itération fractionnaire des transformations formelles d'une variable complexe"
Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1970.

[12] "Javnaja forma zapisi formuly Campbella-Hausdorffa i nekotopye ee primenenija"
Vjestnik Lening. Univ., n° 7 (1973) pp 69-76

[13] "Reshenie dvukh zadach svjazannykh s teoriei iteracii"
Vjestnik Lening. Univ., n.13 (1973) pp 166-167

ERDÖS P. et JABOTINSKY E.

[14] "On analytic iteration"
J. Analyse Math. 8 (1960-61) pp 361-376.

GOLDBERG K.

[15] "The formal power-series log $(e^x e^y)$"
Duke Mathematical Journal, 23 (1956) pp 13-21.

KNESER H.

[16] "Reelle analytische Lösungen des Gleichung $f(f(x))=e^x$ und verwandte Funktionalgleichungen"
J. f. reine und angew. Math. 187 (1950) pp 56-57

KUCZMA M.

[17] "Functional equations in a single variable"
Monografie Mat. 46, Varsovie (1968)

[18] "Fractional iteration of differentiable functions"
Ann. Polon. Math. 22 (1969-70) pp 217-227.

KUCZMA M. et SMAJDOR A.

[19] "Fractional iteration in the class of convex functions"
Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sc. Math. Astr. Phys. 16 (1968) pp 717-720.

LEWIN M.

[20] "Analytic iteration of certain analytic functions"
M. Sc. Thesis, Technion, Israel Inst. of Tech., Haifa (1960)

JABOTINSKY E.

[21] "Representation of composites of functions by matrices. Application to the iteration of ze^z and e^z-1 "
C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947).

[22] "l-sequences for non-embeddable functions"
Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966)

[23] "Analytic iteration"
Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) pp 457-477.

RAN A.

[24] "A non-embeddable composite of embeddable functions"
J. Austr. Math. Soc.

ROUDAKOF (RUDAKOV)

[25] "Avtomorfismy nekotorykh beskonechnomernykh algebr Li"
Dokl. Akad. Nauk SSSR (1968)

SENETA E.

[26] "On Koenigs' Ratios for iterates of real functions"
J. Austr. Math. Soc. Vol X, Paris, 1, 2.

SMAJDOR A.

[27] "Regular iteration with multiplier 1"
Fund . Math. 59 (1966) pp 65-69.

[28] "On the existence of convex iteration groups"
Bull. Acad. Pol. Sc. Série Math. Ast. Phys. 17 (1969) pp 21-23

SZEKERES G.

[29] "Fractional iteration of entire and rational functions"
J. Austr. Math. Soc. 4 (1964) pp. 129-142.

[30] "Fractional iteration of exponentially growing functions"
J. Austr. Math. Soc. 2 (1961-62) pp 301-320.

[31] "Regular iteration of real and complex functions"
Act. Math. 100 (1958) pp 203-258.

SZEKERES et MORRIS

[32] "Tables of the logarithm of iteration of e^x-1 "
J. Austr. Math. Soc. 2 (1961-62) pp 321-332.

TRAUB

[33] "On the n-th derivative of the inverse function"
Amer. Math. Month. 69, n° 9 (1962) pp 904-907.

Pour plus de détails nous renvoyons à la bibliographie très complète qui clôt l'ouvrage [17] de KUCZMA. Toutefois, et sauf erreur de notre part, on n'y trouvera pas de développement ayant trait directement aux questions traitées dans cette thèse.

Enfin, pour les §§ 2 et 3 de la Conclusion, nous renvoyons au livre de Torsten CARLEMAN : [34] "Les fonctions quasi-analytiques" Gauthier-Villars (1926)

(T.S.V.P.)

et surtout à la thèse de doctorat de Thøger BANG : [35] "Om quasi-analytiske Funktioner" (Copenhague, 1946) où l'on trouvera la démonstration de la conjecture de Borel.