

# Zusammensetzungen ganzer Funktionen

Von

IRVINE NOEL BAKER

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1. Einleitung . . . . .	121
I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z) = f\{g(z)\}$ für ganze transzendente Funktionen $f(z)$ , $g(z)$ von kleiner Ordnung . . . . .	122
§ 2. Bisherige Ergebnisse . . . . .	122
§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist . . . . .	124
§ 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven . . . . .	130
II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$ . . . . .	139
§ 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind . . . . .	139
§ 6. Der Fall $e^z$ . . . . .	147
§ 7. Ein Problem von SZEKERES . . . . .	149
§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung in miteinander vertauschbare Funktionen . . . . .	151
§ 9. Iterationen . . . . .	152
§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen $f(z)$ der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ . . . . .	153
§ 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$ . . . . .	158
Literatur . . . . .	163

## § 1. Einleitung

Unter der Zusammensetzung  $f\{g(z)\}$  der Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  verstehen wir die „Substitution“ von  $z$  durch  $g(z)$  in  $f(z)$ . Wir nehmen an, die Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$ , die analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen sein mögen, seien so beschaffen, daß die „Substitution“ in einem gewissen  $z$ -Gebiet sinnvoll ist. Diese Bildung ist im allgemeinen nicht kommutativ, d. h. es gilt nicht immer  $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$ .

Obwohl solche Zusammensetzungen häufig in der Mathematik auftreten (z. B. zur Vereinfachung vieler elementarer Rechnungen), sind sie in voller Allgemeinheit wenig untersucht worden. Erst 1870 hat SCHRÖDER [1], [2] den Fall der „natürlichen Iterierten“  $f_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  einer gegebenen Funktion studiert:

$$f_0(z) = z, \quad f_{n+1}(z) = f\{f_n(z)\}.$$

Hierbei führt er allerdings eine Funktionalgleichung ein, die auf ABEL zurückgeht. Im späten neunzehnten Jahrhundert haben verschiedene Mathematiker (z. B. KOENIGS [3]) die Iterierten und die verwandten Funktionalgleichungen

VON ABEL UND SCHRÖDER lokal untersucht, insbesondere in der Nähe eines Fixpunktes  $\xi$  der zu betrachtenden Funktion  $f(z)$ , d.h. eines Punktes  $\xi$  mit

$$f(\xi) = \xi.$$

Durch MONTELS Theorie der Normalfolgen wurde endlich eine systematischere, um 1920 von JULIA [4] und FATOU [5], [6] aufgebaute Iterationstheorie im Großen für gebrochene und ganze Funktionen möglich. Das Iterationsproblem ist auch im Reellen behandelt worden (z.B. von BÖDEWADT [7]).

Im folgenden beschränken wir uns auf Zusammensetzungen von ganzen Funktionen; dann ist die Zusammensetzung wieder ganz. Die allgemeine Bildung  $f\{g(z)\}$  betrachten wir nur für den Fall, daß die Ordnungen von  $f(z)$  und  $g(z)$  beide kleiner als  $\frac{1}{2}$  sind. Mittels einer Erweiterung (§ 3) der bekannten Ergebnisse über den kleinsten Betrag von Funktionen von kleiner Ordnung gewinnen wir in § 4 den Hauptsatz 3, der später in der Iterationstheorie angewendet wird. Im Teil II werden speziellere Zusammensetzungen betrachtet. Zuerst die vertauschbare

$$f\{g(z)\} = g\{f(z)\}.$$

Die Theorie der vertauschbaren Funktionen ist mit der Iterationstheorie eng verwandt, denn die Iterierten sind ja miteinander vertauschbar; und für passendes  $f(z)$  kann es vorkommen, daß nur die Iterierten  $f_n(z)$  mit  $f(z)$  vertauschbar sind (§ 6). In § 9 bringen wir einen Beitrag zu einem neueren Problem der Iterationstheorie, namentlich zur Frage nach notwendigen Bedingungen dafür, daß eine gegebene ganze Funktion die  $m$ -te Iterierte ( $m > 1$  ganz) einer ganzen Funktion ist. In § 10 wird dieses Problem für den Fall  $m = 2$  weiter verfolgt. Schließlich ziehen wir in § 11 einige Konsequenzen der obigen Resultate für lokale Lösungen der Funktionalgleichung

$$f\{f(z)\} = F(z) \quad \text{für ganzes } F(z);$$

wobei eine Verbesserung eines etwas lückenhaften Paragraphen unserer Arbeit [8] und eine Bemerkung zu einer Vermutung von THRON [9] gebracht werden.

## I. Wachstumseigenschaften der Funktion $F(z) = f\{g(z)\}$ für ganze transzendente<sup>1)</sup> Funktionen $f(z)$ , $g(z)$ von kleiner Ordnung

### § 2. Bisherige Ergebnisse

Es sei in der üblichen Bezeichnung

$$M(f, r) = \text{Max}_{|z|=r} |f(z)|$$

$$m(f, r) = \text{Min}_{|z|=r} |f(z)|.$$

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, daß wir in diesem Abschnitt I uns auf ganze transzendente Funktionen beschränken und der Kürze halber das Adjektiv „transzendent“ weglassen.

Die Fragestellung dieses Abschnitts ergibt sich aus einer Arbeit [8, insbesondere Satz 1] über die Iterationstheorie im Großen, wo wir die folgende Tatsache benutzten: Es sei  $f(z)$  eine ganze Funktion von der Ordnung 0 und  $F(z) = f\{f(z)\}$ ; dann ist  $m(F, r)$  unbeschränkt mit unbegrenzt wachsendem  $r$  [man bemerke, daß  $F(z)$  nicht von Ordnung 0 zu sein braucht!]. Eine untere Abschätzung für  $M(F, r)$ , nämlich

$$M(F, r) > M(f, r^q)$$

für eine beliebig große Konstante  $q$  und passende, beliebig große  $r$ -Werte, kam auch vor. Die Resultate von [8] lassen sich verschärfen, wenn man schärfere Aussagen über  $M(F, r)$  und  $m(F, r)$  zur Verfügung hat. Allgemeiner möchte man von einer zusammengesetzten ganzen Funktion  $e(z) = g\{h(z)\}$ ,  $g(z)$ ,  $h(z)$  ganz, gern wissen, was für Beziehungen es zwischen  $M(e, r)$ ,  $M(g, r)$  und  $M(h, r)$ , bzw.  $m(e, r)$ ,  $m(g, r)$  und  $m(h, r)$  gibt.

Den größten Betrag hat schon PÓLYA [10] behandelt; er hat bewiesen:

**Satz (PÓLYA).**  $e(z)$ ,  $g(z)$  und  $h(z)$  seien ganze Funktionen die (1) und (2) erfüllen:

$$(1) \quad e(z) = g\{h(z)\},$$

$$(2) \quad h(0) = 0.$$

Dann gibt es eine bestimmte, von  $e(z)$ ,  $g(z)$  und  $h(z)$  unabhängige Konstante  $c$  mit

$$(3) \quad M(e, r) > M\left[g, \left\{cM\left(h, \frac{r}{2}\right)\right\}\right].$$

Für ganze Funktionen von kleiner Ordnung besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem größten und dem kleinsten Betrag, z. B. der

**Satz.** (LITTLEWOOD-WIMAN [11], [12]).  $f(z)$  sei eine ganze Funktion der Ordnung  $\rho < 1$ . Dann ist die Menge

$$(4) \quad [r; m(f, r) > \{M(f, r)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \rho)}]$$

für jedes  $\varepsilon > 0$  unbeschränkt.

Man hat sogar Aussagen über die (obere) Dichte der Menge (4) und ähnlicher Mengen (AMIRÀ [13], BESICOVITCH [14], CARTWRIGHT [15], PENNYCUICK [16]). Hiernach liegt es nahe zu fragen, ob es für den kleinsten Betrag von  $e(z) = g\{h(z)\}$  Sätze gibt, die dem Pólyaschen Ergebnis entsprechen, wenigstens im Fall, daß  $g(z)$  und  $h(z)$  kleine Ordnung haben. Es ist allerdings zu erwarten, daß solche Sätze wesentlich komplizierter als der von PÓLYA sind.

In § 4 (Sätze 3 und 4) gelingt es, eine Beziehung der gesuchten Art zu finden, wobei aber die Größe  $m(f, r)$  — d. h. der kleinste Betrag von  $f(z)$  auf dem Kreis  $|z| = r$  — durch den kleinsten Betrag auf gewissen „kreisartigen“ Kurven zu ersetzen ist. Die Sätze 3 und 4 sind von Bedeutung in der Iterationstheorie, und ihre Anwendung in § 8 und § 9 bildet eine weitgehende Verschärfung der Resultate in [8].

§ 3. Der kleinste Betrag und die Niveaulinien einer Funktion,  
deren Ordnung kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist

Die folgenden vorbereitenden Nebenbetrachtungen haben an und für sich schon ein gewisses Interesse. Nach dem Satz von LITTLEWOOD-WIMAN nimmt der kleinste Betrag  $m(f, r)$  der ganzen Funktion  $f(z)$  von kleinerer Ordnung als  $\frac{1}{2}$  beliebig große Werte an. Wir fragen: *Wie groß muß  $r$  gewählt werden, damit  $m(f, r)$  eine vorgegebene Größe  $R$  zum erstenmal erreicht?* Für den Zweck dieser Arbeit ist ausreichend der

**Satz 1.**  $f(z)$  sei eine ganze Funktion der Ordnung  $\rho < \frac{1}{2}$ , ferner  $r(R)$  die kleinste Lösung zu gegebenem  $R > 0$  der Gleichung  $m(f, r) = R$ , und  $M_{-1}(f, r)$  die Umkehrfunktion von  $M(f, r)$ .

Dann gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $R_\delta > 0$ , so daß für alle  $R > R_\delta$

$$(5) \quad M_{-1}(f, R) \leq r(R) \leq \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\rho) + \delta},$$

wobei

$$\frac{1}{L(\rho)} = \text{Max}_{\rho \leq \rho' \leq \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) \cos(\pi \rho')$$

ist.

Es sei bemerkt, daß  $L(0) = 1$  und daß  $L(\rho) \rightarrow \infty$  für  $\rho \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ . Zuerst bringen wir den

**Hilfssatz 1.** Gegeben sei die ganze Funktion  $f(z)$ . Bei obiger Erklärung von  $M(f, r)$  und  $M_{-1}(f, r)$  gibt es zu den reellen Zahlen  $k > 1$ ,  $\delta > 0$  ein  $R_0$ , so daß für alle  $R > R_0$

$$(6) \quad M_{-1}(f, R^k) < (1 + \delta) \{M_{-1}(f, R)\}^k < \{M_{-1}(f, R)\}^{k+\delta}$$

ist.

*Beweis.* Man setze  $s = \log r$  und  $V(s) = \log M(r)$ . Nach dem Dreiecksatz von HADAMARD ist  $V(s)$  eine konvexe Funktion von  $s$ ; insbesondere

$$\frac{V(s) - V(0)}{s} \leq \frac{V(ks) - V(0)}{ks},$$

also

$$(7) \quad V(ks) \geq kV(s) - (k-1)V(0).$$

Für wachsendes  $s$  strebt (nach dem Satz von LIOUVILLE)  $\frac{V(s) - V(0)}{s}$  gegen  $\infty$ . Wegen der Konvexität von  $V(s)$  strebt für unbegrenzt wachsendes  $s$  und für festes  $0$  auch der Ausdruck  $\frac{V(s+\sigma) - V(s)}{\sigma}$  gegen  $\infty$ . Jetzt sei  $\sigma > 0$  so klein gewählt, daß  $e^\sigma < 1 + \delta$ . Es gibt ein  $s_0$ , so daß

$$\frac{V(ks + \sigma) - V(ks)}{\sigma} > \frac{(k-1)V(0)}{\sigma} \quad \text{für } s > s_0.$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$V(ks + \sigma) > kV(s), \quad \text{d. h.} \quad M(f, e^\sigma r^k) > \{M(f, r)\}^k$$

für alle genügend großen  $r$ . Also, wenn man  $M(f, r) = R$  setzt, findet man

$$M_{-1}(f, R^k) < e^\sigma \{M_{-1}(f, R)\}^k < (1 + \delta) \{M_{-1}(f, R)\}^k < \{M_{-1}(f, R)\}^{k+\delta}$$

für alle genügend großen  $R$ , w. z. b. w.

**Beweis von Satz 1.** Jede ganze Funktion  $f_1(z)$  der Ordnung  $\rho < \frac{1}{2}$  läßt sich als ein einfaches kanonisches Produkt darstellen:

$$(8) \quad f_1(z) = C z^{n_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \quad C \text{ Konstante, } n_0 \geq 0 \text{ ganz,}$$

wobei die von Null verschiedenen Nullstellen  $a_n$  nach ihren absoluten Beträgen  $b_n = |a_n|$  durch

$$(8') \quad 0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$$

geordnet werden können. O. B. d. A. kann man den Faktor  $C z^{n_0}$  weglassen. Gilt der Satz für die Produkte

$$(9) \quad f(z) \approx \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

so auch für die allgemeineren Produkte (8). Denn es ist

$$m(f_1, r) = |C| r^{n_0} m(f, r) \quad \text{und} \quad M(f_1, r) = |C| r^{n_0} M(f, r).$$

Unter  $r_1(R)$  verstehe man die kleinste Lösung  $r$  der Gleichung  $m(f_1, r) = R$ . Für genügend großes  $R$  — etwa so groß, daß aus  $M(f_1, r) > R$  die Ungleichung  $|C| r^{n_0} > 1$  folgt — ist

$$m\{f_1, r(R)\} > m\{f, r(R)\} = \bar{R}.$$

Aus der Stetigkeit von  $m(f_1, r)$  folgt, daß  $r_1(R) < r(R)$ . Gilt Satz 1 für  $f(z)$ , so hat man für genügend großes  $R$

$$(10) \quad r_1(R) < r(R) < \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\rho) + \delta/2}, \quad \delta > 0 \text{ beliebig.}$$

Aus  $M(f_1, r) = |C| r^{n_0} M(f, r)$  folgt

$$r = M_{-1}\{f_1, |C| r^{n_0} M(f, r)\} < M_{-1}[f_1, \{M(f, r)\}^{1+\sigma}]$$

für beliebig kleines  $\sigma > 0$  und alle genügend großen  $r$ . Setzt man

$$M(f, r) = R,$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$(11) \quad r = M_{-1}(f, R) < M_{-1}(f_1, R^{1+\sigma}) < \{M_{-1}(f_1, R)\}^{1+2\sigma}$$

für alle genügend großen  $R$ .  $\delta$  sei so klein gewählt, daß

$$(1 + 2\sigma) \left\{L(\rho) + \frac{\delta}{2}\right\} < L(\rho) + \delta.$$

Dann ergeben (10) und (11)

$$r_1(R) < \{M_{-1}(f_1, R)\}^{L(\rho) + \delta}$$

für alle genügend großen  $R$ . Die andere Hälfte von (5), d.h.

$$M_{-1}(f_1, R) < r_1(R),$$

ist trivial.

Es genügt sogar, den Satz für Funktionen mit reellen negativen Nullstellen zu beweisen, d.h. für Funktionen  $g(z)$  der Form (9'):

$$(9') \quad g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right)$$

mit  $b_n$  wie in (8'). Man sieht sofort, daß

$$M(g, r) > M(f, r), \quad m(g, r) < m(f, r), \quad r_g(R) > r_f(R),$$

wobei  $r_f(R)$  bzw.  $r_g(R)$  die kleinste Lösung von  $m(f, r) = R$  bzw.  $m(g, r) = R$  ist. Gilt

$$r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta},$$

so folgt

$$r_f(R) < r_g(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta} < \{M_{-1}(f, R)\}^{L(\varrho)+\delta}.$$

Man beschränke sich also auf die Funktionen (9') von der Ordnung  $\varrho$  und betrachte deren Nullstellen, wobei die Anordnung (8') immer noch vorausgesetzt wird. Die Verteilung von diesen Nullstellen muß man etwas eingehender untersuchen, um das Verhalten von  $m(g, r)$  für unsere Zwecke ausreichend zu beschreiben. Das wird mittels einer Konstruktion von LITTLEWOOD [11] und BESICOVITCH [14] geleistet.

**Die Resultate von LITTLEWOOD und BESICOVITCH.** Dieser Abschnitt ist im wesentlichen der Arbeit [14] von BESICOVITCH entnommen, wo man Beweise für die zitierten Behauptungen findet. Wir haben eine triviale, aber bequeme Abänderung in der Bezeichnung vorgenommen, indem wir die in (12) definierten  $c_n$ , d.h. die Logarithmen der Besicovitchschen  $c_n$  einführen.

Für jedes  $\alpha > \varrho$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-\alpha}$  konvergent [17, S. 249]. Weil die Glieder dieser Reihe positiv und monoton abnehmend sind, folgt  $n b_n^{-\alpha} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , daher  $b_n n^{-\frac{1}{\alpha}} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für jedes  $k < 1/\varrho$  strebt also  $b_n n^{-k} \rightarrow \infty$ . Wir nehmen ein festes  $k' < 1/\varrho$  und setzen

$$(12) \quad c_n = \log(b_n n^{-k'}), \quad c_n \text{ also reell.}$$

Es strebt  $c_n \rightarrow \infty$  mit  $n \rightarrow \infty$ ; folglich strebt der Ausdruck

$$A_1(s) = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_s}{s} \rightarrow \infty$$

für  $s \rightarrow \infty$ .  $A_1(s)$  hat ein Minimum, das für höchstens endlich viele  $s$ -Werte angenommen wird;  $p_1$  sei der größte unter diesen Werten. Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} A_1(p_1) &= d_1 \\ c_1 &\geq d_1, \quad c_{p_1} \leq d_1 \\ A_1(s) &\geq d_1 \quad \text{für } s \geq 1. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise betrachtet man das Minimum (angenommen für  $s = p_2$  und für kein  $s > p_2$ ) des Ausdrucks

$$A_2(s) = \frac{c_{p_1+1} + c_{p_1+2} + \dots + c_{p_1+s}}{s},$$

nämlich  $A_2(p_2) = d_2 > d_1$  mit  $c_{p_1+1} \geq d_2$ ,  $c_{p_1+p_2} \leq d_2$  und  $A_2(s) \geq d_2$  für  $s \geq 1$ . Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Folge  $\{p_i\}$  mit  $p_i$  ganz und positiv, und die Folge  $\{d_i\}$  mit  $d_i$  reell und  $d_1 < d_2 < \dots$ . Diese Folgen sind so beschaffen, daß

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i(p_i) = \frac{c_{t_{i-1}+1} + c_{t_{i-1}+2} + \dots + c_{t_i}}{p_i} = d_i, \quad i \geq 1, \\ c_{t_{i-1}+1} \geq d_i, \quad c_{t_i} \leq d_i \\ \text{und} \\ \frac{c_{t_{i-1}+1} + c_{t_{i-1}+2} + \dots + c_{t_{i-1}+s}}{s} = A_i(s) \geq d_i \quad \text{für alle } s \geq 1. \end{array} \right.$$

Hierbei ist

$$t_i = p_1 + \dots + p_i, \quad t_0 = 0.$$

BESICOVITCH hat bewiesen, daß für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  und für alle genügend große  $i$  die Ungleichung

$$(14) \quad m(g, r) > \{M(g, r)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}, \quad \varrho' = \frac{1}{k'} > \varrho$$

im Intervall

$$(15) \quad e^{d_i} (t_i + \frac{1}{2})^{k'} \leq r \leq e^{d_{i+1}} (t_i + \frac{1}{2})^{k'}$$

gilt.

Wir wollen die obigen Resultate von BESICOVITCH anwenden, um zu zeigen, daß die die Ungleichung (14) befriedigenden  $r$ -Werte mit einer gewissen mindesten Häufigkeit vorkommen und sogar, daß benachbarte Intervalle (15) nicht allzu weit voneinander entfernt liegen. Daraus wird folgen, daß  $r(R)$  und  $M_{-1}(f, R)$  Größen derselben Ordnung sind.

Es seien  $k$  und  $k'$  so gewählt, daß

$$(16) \quad \frac{1}{\varrho} > k > k' > 2; \quad \varrho < \frac{1}{k} < \frac{1}{k'} = \varrho' < \frac{1}{2}.$$

Es strebt  $b_n n^{-k} \rightarrow \infty$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Also gilt für alle genügend große  $n$

$$b_n n^{-k'} > e n^{k-k'}$$

und nach (12)

$$(17) \quad c_n = \log(b_n n^{-k'}) > (k - k') \log n + 1 > (k - k') \log(n + \frac{1}{2}).$$

Wir setzen  $S_i$  für den rechten Endpunkt des  $i$ -ten Intervalls (15) und  $s_i$  für den linken Endpunkt des  $(i+1)$ -ten Intervalls:

$$\begin{aligned} S_i &= e^{d_{i+1}} (t_i + \frac{1}{2})^{k'} \\ s_i &= e^{d_{i+1}} (t_{i+1} + \frac{1}{2})^{k'}. \end{aligned}$$

Nach (13), (17) ist

$$d_{i+1} > c_{i+1} > (k - k') \log(t_{i+1} + \frac{1}{2})$$

und damit

$$e^{d_{i+1}} > (t_{i+1} + \frac{1}{2})^{k-k'}$$

für alle genügend große  $i$ . Andererseits gilt für großes  $i$

$$S_i > e^{d_{i+1}} > (t_{i+1} + \frac{1}{2})^{k-k'}$$

und somit

$$s_i < e^{d_{i+1}} (e^{d_{i+1}})^{k/(k-k')} = e^{d_{i+1}(k/k-k')} < S_i^{k/k-k'}.$$

Nach den Resultaten von BESICOVITCH kann man die Ungleichung

$$s_i < S_i^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)}$$

so deuten: Es gibt ein  $Y$ , so daß für  $R > Y$  das Intervall  $(R, R^{k/(k-k')})$  mindestens einen die Ungleichung (14) befriedigenden Punkt  $r$  enthält.

Zu gegebenem  $R$  sei  $r_1$  die Lösung der Gleichung

$$M(g, r) = R^{\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}}.$$

$R$  sei so groß gewählt, daß  $r_1$  größer als  $Y$  ist. Dann liegt im Intervall  $(r_1, r_1^{k/(k-k')})$  wenigstens ein Punkt  $r_2$ , für den gilt

$$(18) \quad m(g, r_2) > \{M(g, r_2)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \varrho')} > \{M(g, r_1)\}^{(-\varepsilon + \cos \pi \varrho')} = R.$$

Weil  $m(g, r)$  eine stetige Funktion von  $r$  ist, ist  $r(R)$ , die kleinste Lösung von  $m(g, r) = R$ , kleiner als  $r_2$  und  $r_2 < r_1^{k/(k-k')}$ . Trivialerweise ist  $r(R) > M_{-1}(g, R)$ . Somit haben wir tatsächlich für alle genügend großen  $R$ :

$$(5') \quad M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \left\{ M_{-1}\left(g, R^{\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'}}\right) \right\}^{\frac{k}{k-k'}}.$$

Nach Hilfssatz 1 ist für alle genügend großen  $R$

$$(19) \quad r(R) < \{M_{-1}(g, R)\}^{\left(\frac{k}{k-k'}\right)\left(\frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'} + \frac{\delta}{3}\right)},$$

wobei  $\delta > 0$  beliebig klein gewählt werden darf. Im folgenden versuchen wir, im Ausdruck (19) einen möglichst kleinen Exponenten zu erhalten.

Man setze  $k = 1/\varrho_1$ . Die Ungleichungen (16) ergeben

$$(20) \quad \varrho < \varrho_1 < \varrho' < \frac{1}{2}.$$

Es sei

$$\frac{1}{L(\varrho)} = \limsup_{\substack{\varrho_1, \varrho' \\ \varrho < \varrho_1 < \varrho' < \frac{1}{2}}} (1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho' = \text{Max}_{\varrho \leq \varrho' \leq \frac{1}{2}} (1 - \varrho/\varrho') \cos \pi \varrho'.$$

Man nehme  $\varrho_1, \varrho'$  wie in (20) und ferner so, daß

$$(1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho' > 1/(L(\varrho) + \delta/3),$$

also

$$\frac{k}{k-k'} \cdot \frac{1}{\cos \pi \varrho'} = \frac{1}{(1 - \varrho_1/\varrho') \cos \pi \varrho'} < L(\varrho) + \frac{\delta}{3}.$$



$\varepsilon > 0$  war beliebig klein zu wählen; es sei so klein, daß

$$\frac{k}{k-k'} \cdot \frac{1}{-\varepsilon + \cos \pi \varrho'} < L(\varrho) + \frac{2\delta}{3}$$

für die jetzt gewählten  $k, k'$ . Mit diesen Werten von  $k, k'$  und  $\varepsilon$ , die allein von  $\varrho$  und  $\delta$  abhängen, ergibt die obige Diskussion [insbesondere (5')], daß für alle genügend großen  $R$

$$(5) \quad M_{-1}(g, R) \leq r(R) \leq \{M_{-1}(g, R)\}^{L(\varrho)+\delta}$$

ist. Also ist Satz 1 für die Funktion (9') und somit allgemein bewiesen worden.

Das Verhalten des kleinsten Betrages hat natürlich Konsequenzen für die Niveaulinien einer ganzen Funktion:

**Satz 2.** *Es seien  $B > A > 0$ ,  $R > 0$  und  $g(z)$  eine in  $|z| \leq B$  reguläre Funktion mit den Eigenschaften:*

$$\text{für } |z| < A \text{ ist } |g(z)| < R,$$

$$\text{für } |z| = B \text{ ist } |g(z)| > R;$$

dann gibt es in  $A \leq |z| < B$  eine einfach geschlossene, den Nullpunkt enthaltende Kurve  $\Gamma$ , auf der  $|g(z)| = R$  gilt.

Insbesondere sei  $g(z)$  eine ganze Funktion der Ordnung  $\varrho < \frac{1}{2}$ ; dann gibt es ein  $R_0 > 0$ , so daß für alle  $R > R_0$  der Kreisring

$$(21) \quad M_{-1}(g, R) \leq |z| < r(R+1)$$

eine den Nullpunkt enthaltende, einfach geschlossene Kurve  $\Gamma$  enthält, auf der  $|g(z)| = R$  gilt.

*Beweis.* Man nehme die zusammenhängende (nach dem Satz vom Maximum sogar einfach zusammenhängende) Komponente  $K$  der offenen Menge  $\{z \mid |g(z)| < R\}$ , die den Kreis  $|z| < A$  einschließt.  $\Gamma$  wird als Rand von  $K$  gewählt. Der Rand von  $K$  besteht aus Niveaukurvenstücken, auf denen  $|g(z)| = R$  gilt. Aus der Kompaktheit der in der Kreisscheibe  $|z| \leq B$  gelegenen Niveaukurven  $|g(z)| = R$  folgt, daß diese Kurven eine endliche Gesamtbogenlänge haben. Von einem beliebigen Punkt  $Q$  auf dem Rand von  $K$  ausgehend, verfolge man irgendeinen durch  $Q$  laufenden Zweig von Rand  $K$ ; man gehe immer in der gleichen Richtung weiter; stößt man auf einen Kreuzungspunkt  $P$  der Niveaukurven, indem man in  $P$  entlang dem Kurvenast  $\alpha$  ankommt, so soll man  $P$  entlang den nach folgender Vorschrift gewählten Ast  $\alpha'$  verlassen:  $\alpha'$  schließt mit  $\alpha$  in der Umgebung von  $P$  einen Winkelraum ein, dessen innere Punkte zu  $K$  gehören. Dann gehört auch der Ast  $\alpha'$  zu Rand  $K$ . Dieser Vorschrift für jeden eventuell vorkommenden Kreuzungspunkt folgend, kann man den Rand von  $K$  unbegrenzt verfolgen. Wegen der Beschränktheit der Gesamtbogenlänge trifft man einen Punkt  $\eta$  mehr als einmal;  $\Gamma$  sei der zwischen dem ersten und zweiten Auftreten von  $\eta$  durchlaufene Teil von Rand  $K$ ; wenn man die durchlaufene Bogenlänge als Parameter einführt, erkennt man, daß  $\Gamma$  eine Jordan-Kurve bildet, auf der  $|g(z)| = R$  gilt. Im Innern von  $\Gamma$  ist  $|g(z)| < R$ .

Es gibt in  $|z| < B$  nur endlich viele Nullstellen von  $f'(z)$ , d. h. Kreuzungspunkte des Niveaugebildes. Man nehme einen Punkt  $\xi \in \Gamma$ , der kein Kreuzungspunkt ist. Nach dem Satz vom größten Betrag wird eine kleine Kreisscheibe um  $\xi$  durch die Kurve  $\Gamma$  in zwei Teile  $K_1, K_2$  geteilt, für die  $|f(z)| > R$  bzw.  $|f(z)| < R$ .  $K_2$  gehört zum Innern von  $\Gamma$ . Nun gehört  $\Gamma$  zum Rand von  $K$ . Es folgt, daß  $K$  mit dem Innern von  $\Gamma$  identisch ist und daß  $\Gamma$  den Nullpunkt enthält.

Die Behauptung über ganze Funktionen folgt unmittelbar aus dem ersten Teil des Satzes.

Für ganze Funktionen höherer Ordnung brauchen geschlossene Niveaulinien überhaupt nicht zu existieren; so sind die Niveaulinien von  $e^z$  z. B. die Geraden  $\operatorname{Re} z = \text{konst.}$

#### § 4. Die Zusammensetzung $f\{g(z)\}$ und ihre Größe auf gewissen kreisartigen Kurven

Die grundlegenden Sätze 1 und 2 kann man jetzt anwenden, um Ergebnisse über die Wertverteilung von zusammengesetzten Funktionen der Form  $f\{g(z)\}$  abzuleiten.

**Satz 3.** *Es seien  $f(z)$  und  $g(z)$  ganze Funktionen der Ordnung  $\rho_f$  bzw.  $\rho_g$ ,  $0 \leq \rho_f < \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \rho_g < \frac{1}{2}$ . Dann existiert zu gegebenen  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven  $\Gamma_i$ , die den Nullpunkt enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben: Es seien  $\bar{\sigma}_i$  und  $\underline{\sigma}_i$  die größte bzw. kleinste Entfernung zwischen dem Nullpunkt und  $\Gamma_i$ . Dann*

- (i)  $\underline{\sigma}_i \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $\bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\rho_g) + \delta}$ , wobei  $L(\rho_g)$  die im Satz 1 erklärte Bedeutung hat,
- (iii) auf  $\Gamma_i$  (die innerhalb von  $|z| < \bar{\sigma}_i$  liegt) ist

$$(22) \quad |f\{g(z)\}| > M \left[ f, M \left( g, \bar{\sigma}_i, \frac{1}{L(\rho_g) + \delta} \right) \right]^{-\varepsilon + \cos \pi \rho_f}$$

für  $z \in \Gamma_i$ . Ferner lassen sich positive Konstanten  $K > 1$  und  $r_0$  finden, so daß für  $s > r_0$  jeder Kreisring  $s < |z| < s^K$  eine solche Kurve  $\Gamma$  enthält.

*Beweis.* Wir nehmen gemäß Satz 1 so große  $R$ -Werte, daß

$$r_g(R) < M_{-1}(g, R)^{L(\rho_g) + \delta}$$

ist [ $r_g(R)$  ist die kleinste Lösung der Gleichung  $m(g, r) = R$ ], und daß die Voraussetzungen des Satzes 2 bezüglich der Funktion  $g(z)$  erfüllt werden. Unter diesen wählen wir einen solchen Wert  $R_i$ , daß auch (Satz von LITTLEWOOD-WIMAN)

$$m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \rho_f}$$

gilt. Nach Satz 2 gibt es eine Jordan-Kurve  $\Gamma_i$  in dem Kreisring

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < r_g(R_i + 1),$$

für die  $|g(z)| = R_i$  ist. Für großes  $R_i$  ist nach Hilfssatz 1

$$r_g(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i + 1)\}^{L(\varrho_i) + \frac{\delta}{2}} < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_i) + \delta},$$

und  $I_i$  liegt daher in

$$(23) \quad M_{-1}(g, R_i) \leq |z| < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_i) + \delta}.$$

Für  $z \in I_i$  hat man

$$(24) \quad |f\{g(z)\}| > m(f, R_i) > \{M(f, R_i)\}^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_i}.$$

Nun ist

$$\bar{\sigma}_i \leq r(R_i + 1) < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_i) + \delta}$$

d.h.

$$R_i > M\left(g, \bar{\sigma}_i^{\frac{1}{L(\varrho_i) + \delta}}\right),$$

und (24) wird somit zu (22). Weil  $\underline{\sigma}_i > M_{-1}(g, R_i)$  ist, ist (23) gleichbedeutend mit

$$\underline{\sigma}_i \leq |z| \leq \bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{L(\varrho_i) + \delta} \quad \text{für } z \in I_i.$$

Zu beweisen bleibt nur die Aussage über die Verteilung der  $\Gamma_i$ -Kurven. Nehmen wir  $\varepsilon' < \varepsilon$ ,  $\frac{1}{2} > \varrho' > \varrho_i$ , so daß

$$\cos(\pi \varrho') - \varepsilon' = \cos(\pi \varrho_i) - \varepsilon.$$

Aus dem Beweis von Satz 1 [vgl. (17), (18)] sieht man, daß für alle genügend großen  $R$  ( $> A$  etwa) jedes Intervall  $(R, R^c)$  — wobei  $c > \varrho' / (\varrho' - \varrho_i)$  — ein solches  $\tilde{R}$  enthält, daß

$$(25) \quad m(f, \tilde{R}) > M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon' + \cos \pi \varrho'} = M(f, \tilde{R})^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_i}.$$

Im folgenden wollen wir nur so große  $s$ -Werte wählen, daß  $R = M(g, s) > A$ . Nach dem Hilfssatz 1 ist für beliebiges, festes  $\tilde{\varepsilon} > 0$  und passend großes  $s$

$$M_{-1}(g, R^c) < \{M_{-1}(g, R)\}^{c + \tilde{\varepsilon}} = s^{c + \tilde{\varepsilon}}$$

und daher

$$M(g, s^{c + \tilde{\varepsilon}}) > \{M(g, s)\}^c = R^c.$$

In  $(R, R^c)$  liegt ein  $\tilde{R}$ , das (25) genügt. In  $(s, s^{c + \tilde{\varepsilon}})$  liegt ein  $\tilde{s}$  mit  $M(g, \tilde{s}) = \tilde{R}$ . Also liegt nach (23) im Kreisring

$$\tilde{s} \leq |z| < \tilde{s}^{L(\varrho_i) + \delta}$$

und somit sicher im Kreisring

$$s \leq |z| < s^{(c + \tilde{\varepsilon})(L(\varrho_i) + \delta)}$$

eine den Nullpunkt umschlingende Jordan-Kurve  $\Gamma$  des behaupteten Typs. Das  $K$  der Behauptung ist gleich

$$(c + \tilde{\varepsilon})(L(\varrho_i) + \delta).$$

*Zusatz.* Es ist klar, daß  $M[f\{g(z)\}, r] \leq M[f, M(g, r)]$ . Dann ist für die rechte Seite von (22)

$$\begin{aligned} M\left[f, M\left\{g, \bar{\sigma}_i, \frac{1}{L(\varrho_f) + \delta}\right\}\right]^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f} &> M\left[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i, \frac{1}{L(\varrho_f) + \delta}\right]^{-\varepsilon + \cos \pi \varrho_f} \\ &\geq M\left[f\{g(z)\}, \bar{\sigma}_i\right]^{\left(\frac{\cos \pi \varrho_f - \varepsilon - \varepsilon'}{L(\varrho_f) + \delta}\right)} \end{aligned}$$

für beliebig kleines  $\varepsilon' > 0$  und passend großes  $\bar{\sigma}_i$  nach Hilfssatz 1.

Notwendig, daß eine gegebene ganze Funktion  $\Phi(z)$  sich in der Form  $\Phi(z) = f\{g(z)\}$  aus zwei ganzen Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  von kleinerer Ordnung als  $\frac{1}{2}$  zusammensetzen läßt, ist die Bedingung, daß es eine Konstante  $\alpha > 0$  und eine Folge von Kurven  $\Gamma_i$  (mit  $\bar{\sigma}_i = \text{Max } |z|, z \in \Gamma_i$ ) der oben beschriebenen Beschaffenheit gibt, auf denen

$$(26) \quad |\Phi(z)| > \{M(\Phi, \bar{\sigma}_i)\}^\alpha$$

ist. Obleich wir jetzt Kurven  $\Gamma_i$  haben, für die sich der kleinste Betrag mit dem größten vergleichen läßt, wird über die absolute Größe von  $|f\{g(z)\}|$  auf diesen Kurven immer noch fast nichts ausgesagt: Es wäre denkbar, etwa bei unregelmäßigem Wachstum von  $f\{g(z)\}$ , daß  $M[f\{g(z)\}, r]$  in gewissen, die Kurven  $\Gamma_i$  enthaltenden Bereichen verhältnismäßig kleine Werte annimmt. Deshalb ist interessant der

**Satz 4.** *Es seien  $f(z)$  und  $g(z)$  ganze (transzendente) Funktionen der Ordnungen  $\varrho_f$  bzw.  $\varrho_g$ ,  $0 < \varrho_f < \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \varrho_g < \frac{1}{2}$ ;  $L$  sei eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gibt es eine Folge  $\Gamma_i$  von geschlossenen, den Nullpunkt enthaltenden, und den Anforderungen (i) und (ii) von Satz 3 genügenden Jordan-Kurven, auf denen*

$$(27) \quad |f\{g(z)\}| > \exp(\bar{\sigma}_i^L)$$

für  $z \in \Gamma_i$  gilt, wobei  $\bar{\sigma}_i = \text{Max}_{z \in \Gamma_i} |z|$ .

*Beweis.* Es folgt bekanntlich aus den Phragmen-Lindelöfschen Methoden, daß zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  und einer ganzen Funktion  $f(z)$  der Ordnung  $\varrho_f$ ,  $0 < \varrho_f < \frac{1}{2}$ , sich beliebig große  $R$ -Werte  $R_i$  finden lassen, für die  $m(f, R_i) > \exp(R_i^{\varrho_f - \varepsilon})$ . Im Beweis von Satz 3 könnte man solche Werte für  $R_i$  nehmen. Dann gibt es in

$$M_{-1}(g, R_i) \leq |z| \leq \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}$$

für genügend großes  $R_i$  Kurven  $\Gamma_i$ , auf denen

$$(28) \quad |f\{g(z)\}| > \exp(R_i^{\varrho_f - \varepsilon}) > \exp\left[\left\{M\left(g, \bar{\sigma}_i, \frac{1}{L(\varrho_g) + \delta}\right)\right\}^{\varrho_f - \varepsilon}\right].$$

weil  $\bar{\sigma}_i < \{M_{-1}(g, R_i)\}^{L(\varrho_g) + \delta}$  ist. Zu gegebenem  $K > 0$  ist für genügend großes  $\bar{\sigma}_i$  (und also  $R_i$ )

$$M\left(g, \bar{\sigma}_i, \frac{1}{L(\varrho_g) + \delta}\right) > \bar{\sigma}_i^{\left(\frac{K}{L(\varrho_g) + \delta}\right)}.$$

(28) wird daher zu

$$(29) \quad |f\{g(z)\}| > \exp \left[ \bar{\sigma}_f \left\{ \frac{K(\varrho_f - \varepsilon)}{L(\varrho_f) + \delta} \right\} \right].$$

Der Exponent von  $\bar{\sigma}_f$  in (29) kann durch passende Wahl von  $K$  beliebig groß gemacht werden, insbesondere größer als das  $L$  von (27). Die Funktion  $f\{g(z)\}$  ist von unendlicher Ordnung.

*Bemerkung.* Die Bedingung  $\varrho_f > 0$  in Satz 4 ist wesentlich. Wenn  $\varrho_f = 0$ ,  $0 \leq \varrho_g < \infty$ , ist es möglich, daß  $f\{g(z)\}$  sogar eine endliche Ordnung hat. (Vgl. PÓLYA [10], BAKER [8].)

Nach Satz 4, wie nach dem in § 2 zitierten Satz von PÓLYA ist es klar daß  $\varrho_f > 0$  eine unendliche Ordnung für  $f\{g(z)\}$  zur Folge hat. Trotz der Pólyaschen Relation braucht die Wachstumsgeschwindigkeit von  $f\{g(z)\}$  keineswegs so hoch wie  $\exp\{\exp(r^{\varrho_f})\}$  [ein Ausdruck, der ungefähr der Zusammensetzung von  $\exp(r^{\varrho_f})$  und  $\exp(r^{\varrho_f})$  entspricht] zu sein. Das beruht auf der Möglichkeit einer Wechselwirkung zwischen zwei unregelmäßigen Wachstumsarten für  $f(z)$  und  $g(z)$ . Erst wenn man weitere Wachstumsbedingungen hinzufügt [etwa  $\varrho_f > 0$ ,  $0 < \varrho_g =$  untere Ordnung von  $g(z)$ ] wird die Existenz eines  $\alpha > 0$  gesichert, für das

$$M[f\{g(z)\}, r] \neq 0 \{\exp(\exp r^\alpha)\}.$$

Auf diese Verhältnisse gehen wir nicht näher ein. Um aber zu zeigen, daß sich die Ungleichung (27) von Satz 4 im allgemeinsten Falle nicht sehr verbessern läßt, beweisen wir den

**Satz 5.** Gegeben seien zwei Konstanten  $\varrho_g, \varrho_G$  (mit  $0 < \varrho_g < 1$ ,  $0 < \varrho_G < 1$ ) und eine reelle Funktion  $\mu(r)$  mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(r) = \infty$ . Dann existieren zwei ganze Funktionen  $g(z)$  und  $G(z)$  der Ordnung  $\varrho_g$  bzw.  $\varrho_G$ , so daß

$$(30) \quad M[G\{g(z)\}, r] < \exp(r^{\mu(r)})$$

für alle genügend großen  $r$  gilt.

Da Verkleinerung von  $\mu(r)$  die Behauptung verschärft, können wir von vornherein

$$(31) \quad \mu(r) \leq \log r$$

annehmen. Als Vorbereitung für den Beweis dieses Satzes schicken wir ein paar Bemerkungen über den bekannten Zusammenhang zwischen der Nullstellenverteilung und dem Wachstum einer ganzen Funktion voraus.

**Hilfssatz 2.** Für ein kanonisches Produkt  $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$  sei  $n(r)$  die Anzahl der Nullstellen, deren Betrag nicht größer als  $r$  ist. Wenn für  $0 < \varrho < 1$  stets  $n(r) \leq r^\varrho$ , aber  $n(r) = O(r^{\varrho - \varepsilon})$  für kein  $\varepsilon > 0$  ist, so ist die Ordnung von  $g(z)$  gleich  $\varrho$ .

*Beweis.* Die Ordnung eines kanonischen Produktes ist gleich dem Konvergenzexponenten der Nullstellen (vgl. z.B. [17]). Nun folgt aus  $n(r) \leq r^\varrho$  die Konvergenz von  $\sum b_n^{-(\varrho + \delta)}$ ,  $b_n = |a_n|$ , für jedes positive  $\delta$  (Vergleich mit

$\sum n^{-(1+\delta/\rho)}$ ; d.h. der Konvergenzexponent und damit die Ordnung sind nicht größer als  $\rho$ . Wenn die Ordnung von  $g(z)$  gleich  $A$  ist, folgt aus dem Jensenschen Satz, daß  $n(r) = O(r^{A+\varepsilon})$  für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt. Wäre also die Ordnung  $A$ ,  $A < \rho$ , so wäre  $n(r) = O(r^{A+\varepsilon})$  für jedes positive  $\varepsilon$ , also gleich  $O(r^{(A+\rho)/2})$  entgegen der Annahme des Hilfssatzes.

*Bezeichnungen.* Ein Polynom

$$P(z) = \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_m}\right), \quad 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| = T$$

soll von der Klasse  $(\rho, T)$  sein, wenn für die Anzahlfunktion der Nullstellen  $n(r) \leq r^\rho$  gilt, d.h. für  $|a_m| \geq m^{1/\rho}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Ein festes Polynom  $P(z)$  von der Klasse  $(\rho, T)$  bestimmt für  $W > T$  die Funktionenklasse  $\{P, \rho, W\}$  aller Funktionen  $g$

$$(32) \quad g(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_m}\right), \quad 0 < |b_1| \leq |b_2| \leq \dots$$

mit  $b_i = a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$|b_{n+1}| > W > T,$$

und  $n_g(r) \leq r^\rho$ .

**Lemma 3a)** Für  $\rho < 1$  seien ein Polynom  $P(z)$  von der Klasse  $(\rho, T)$  und ein  $V > 0$  gegeben. Dann gibt es ein  $W > V$ , so daß für jede Funktion  $g(z)$  der Klasse  $\{P, \rho, W\}$

$$(33) \quad \frac{1}{2} M(P, r) < M(g, r) < 2M(P, r)$$

für  $r \leq V$  gilt.

**3b)** Zu der als fest betrachteten Funktion  $\mu(r)$  von Satz 5 und einem Polynom  $P(z)$  gibt es ein  $U = U(P)$ , so daß

$$(34) \quad 2M(P, r) < r^{\mu(r)}$$

für  $r \geq U$  gilt. Ist  $P$  von der Klasse  $(\rho, T)$ , so werden wir immer annehmen, daß  $U > T$  ist.

**3c)** In 3a) wählen wir  $V$  größer als das  $U$  von 3b). Dann gelten (33) und

$$(35) \quad M(g, r) < r^{\mu(r)}$$

für alle  $r$  in  $[U, V]$  und  $g \in \{P, \rho, W\}$ .

*Beweis.* 3a) Für  $\left|\frac{z}{b_m}\right| < \frac{1}{2}$  ist

$$\begin{aligned} \left| \log \left(1 - \frac{z}{b_m}\right) \right| &= \left| \frac{z}{b_m} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{z}{b_m} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{b_m}\right)^2 + \dots \right\} \right| \\ &< \left| \frac{z}{b_m} \right| \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots \right) = \frac{2|z|}{|b_m|}. \end{aligned}$$

Ist

$$(36) \quad W > 2V,$$

so gilt für  $|z| \leq V$  (mit der Bezeichnung  $|b_m| = d_m$ )

$$(37) \quad \left| \log \prod_{m > n(W)} \left( 1 - \frac{z}{b_m} \right) \right| = \sum_{m > n(W)} \left| \log \left( 1 - \frac{z}{b_m} \right) \right| \leq 2|z| \sum_{m > n(W)} d_m^{-1}.$$

Es ist  $n(W) \leq W^e$ . Man spalte die letzte Summe von (37) auf folgende Weise auf:

$$\sum_{m > n(W)} d_m^{-1} = \sum_{n(W) < m < W^e} d_m^{-1} + \sum_{m \geq W^e} d_m^{-1} = S_1 + S_2.$$

In  $S_1$  ist  $d_m > W$ , also ist  $S_1 < W^e W^{-1}$ . Für alle  $r$  gilt  $n(r) \leq r^e$ , d.h. es gilt

$$d_m^{-1} < m^{-1/e} < m^{-2},$$

und somit

$$S_2 < \sum_{m \geq W^e} m^{-2} = O(W^{-e}).$$

(37) wird nun zu

$$(38) \quad \left| \log \prod_{m > n(W)} \left( 1 - \frac{z}{b_m} \right) \right| = 2|z| O(W^{-e} + W^{e-1}).$$

Offenbar kann man beliebig große  $W$  wählen, so daß (36) erfüllt und (38) beliebig klein wird. Diese Wahl kann gleichmäßig für alle  $g(z) \in \{P, \varrho, W\}$  getroffen werden. Dadurch kann man erreichen, daß

$$\frac{1}{2} < \left| \prod_{m > n(W)} \left( 1 - \frac{z}{b_m} \right) \right| < 2,$$

also

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{g(z)}{P(z)} \right| < 2$$

für  $|z| \leq V$  gilt. Hieraus folgt die Ungleichung (33) für  $|z| \leq V$ . 3b) und 3c) sind trivial.

*Beweis von Satz 5.* Der Grundgedanke der Konstruktion ist der folgende: Um die Größenbeschränkung (30) zu bewirken, werden  $G(z)$  und  $g(z)$  als Funktionen mit sehr unregelmäßigem Wachstum angesetzt. Nämlich  $G(Z)$  kann für die Werte von  $Z$  verhältnismäßig groß sein, die als Werte von  $g(z)$  dort vorkommen, wo  $g(z)$  verglichen mit  $|z|$  verhältnismäßig klein ist. Umgekehrt, ist  $Z = g(z)$  verglichen mit  $|z|$  recht groß, so soll  $G(Z)$  verglichen mit  $|Z|$  von mäßiger Größe sein. Dieser unbestimmte Gedanke wird verwirklicht, indem wir zwei nach  $\infty$  strebende Folgen

$$(39) \quad 0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1 < t_2 < u_2 < v_2 < w_2 < t_3 < \dots,$$

$$(40) \quad 0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1 < V_1 < W_1 < T_2 < U_2 < V_2 < W_2 < T_3 < \dots$$

konstruieren. Mit ihnen bilden wir

$$(41) \quad q_m = [t_m^{o_g}] - [t_{m-1}^{o_g}], \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$(42) \quad Q_m = [T_m^{o_g}] - [T_{m-1}^{o_g}], \quad m = 1, 2, \dots$$

(worin  $t_0 = T_0 = 0$  zu setzen ist), die Polynome

$$(43) \quad p_m(z) = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_g, t_m),$$

$$(44) \quad P_m(z) = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k} \quad \text{der Klasse } (\varrho_G, T_m)$$

und die ganzen Funktionen

$$(45) \quad g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{q_k},$$

$$(46) \quad G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{T_k}\right)^{Q_k}.$$

Wir wollen nachweisen, daß  $g(z)$  und  $G(z)$  die Behauptung von Satz 5 erfüllen. Für  $n_g(r)$ , die Anzahlfunktion der Nullstellen von  $g(z)$  gilt

$$n_g(t_m) = [t_m^{\varrho_g}]$$

und für alle  $r$  mit  $t_m < r < t_{m+1}$

$$n_g(r) = [r^{\varrho_g}] < r^{\varrho_g}.$$

Nach Hilfssatz 2 ist die Ordnung von  $g(z)$  genau  $\varrho_g$ . Entsprechend ist die Ordnung von  $G(z)$  genau  $\varrho_G$ .

Um die wichtigste Behauptung (30) zu beweisen, richten wir die Folgen so ein, daß für jedes  $n = 1, 2, \dots$  die endlichen Teilfolgen von (39) und (40):

$$(47) \quad 0 < t_1 < \dots < t_n < u_n < v_n < w_n,$$

$$(48) \quad 0 < V_0 < W_0 < \dots < V_{n-1} < W_{n-1} < T_n < U_n$$

die in (49) bis (53) ausgesprochenen Eigenschaften besitzen: Für jede Funktion  $g_n(z)$  der Klasse  $\{p_n, \varrho_g, w_n\}$  gelten

$$(49) \quad M(g_n, u_k) < V_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(50) \quad M(g_n, v_k) > U_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(51) \quad M(g_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [u_k, v_k], \quad k = 1, \dots, n.$$

Für jede Funktion  $G_n(z)$  der Klasse  $\{P_{n-1}, \varrho_G, W_{n-1}\}$  gelten

$$(52) \quad M(G_n, r) < 2 \quad \text{in } [0, V_0],$$

$$(52') \quad M(G_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [U_k, V_k], \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Weiter gilt

$$(53) \quad 2M(P_n, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{für } r \geq U_n.$$

Nehmen wir vorläufig an, die angegebenen Anforderungen (49) bis (53) für  $n = 1, 2, \dots$  seien erfüllt. Wir zeigen, daß dann die Funktionen  $g(z)$  und  $G(z)$  von (45) bzw. (46) die Ungleichung (30) erfüllen. Die Funktionen  $g(z)$



und  $G(z)$  gehören den Klassen  $\{\phi_n, \varrho_n, w_n\}$  bzw.  $\{P_n, \varrho_G, W_n\}$  für alle  $n$  an. Daraus und aus (49) bis (52') folgen

$$(54) \quad M(g, u_k) < V_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(55) \quad M(g, v_k) > U_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(56) \quad M(g, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [u_k, v_k], \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(57) \quad M(G, r) < 2 \quad \text{in } [0, V_0],$$

$$(57') \quad M(G, r) < r^{\mu(r)} \quad \text{in } [U_k, V_k], \quad k = 1, 2, \dots$$

Weil  $g(z)$  bzw.  $G(z)$  die Ordnung  $\varrho_g < 1$  bzw.  $\varrho_G < 1$  hat, gelten für alle großen  $r$ -Werte

$$(58) \quad M(g, r) < \exp(r^{\varrho_g+1}) \quad \text{bzw.} \quad M(G, r) < e^r.$$

Allgemein gilt

$$(58') \quad M\{G(g), r\} \leq M\{G, M(g, r)\}.$$

(i) Für  $r$  gemäß  $v_{k-1} \leq r \leq u_k$  liegt  $R = M(g, r)$  in  $[U_{k-1}, V_{k-1}]$  nach (54). (55). Hiernach und nach (57') ist

$$M(G, R) < R^{\mu(R)}$$

und (58') wird zu

$$\begin{aligned} M\{G(g), r\} &< R^{\mu(R)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g+1})\}^{\mu(\exp(r^{\varrho_g+1}))} \quad \text{nach (58)} \\ &< \{\exp(r^{\varrho_g+1})\}^{r^{\varrho_g+1}} \quad \text{nach (31)} \\ &= \exp(r^{2\varrho_g+2}) < \exp(r^{\mu(r)}) \end{aligned}$$

für alle genügend großen  $r$  (oder  $k$ ).

(ii) Für  $r$  gemäß  $u_k \leq r \leq v_k$  ist nach (56)

$$R = M(g, r) < r^{\mu(r)}$$

und (58') wird zu

$$M\{G(g), r\} \leq e^R < \exp(r^{\mu(r)})$$

für alle genügend großen  $r$  (oder  $k$ ). Alle  $r$ -Werte fallen entweder in Intervalle  $[v_{k-1}, u_k]$  oder Intervalle  $[u_k, v_k]$ , so daß die Behauptung (30) von Satz 5 bewiesen ist.

Es bleibt, die induktive Konstruktion der Folgen (39), (40) mit den Eigenschaften (49) bis (53) nachzuholen.

$n = 1$ . Man wähle  $t_1 > 0$  und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom  $\phi_1(z)$  der Klasse  $(\varrho_1, t_1)$ . Nach Hilfssatz 3b existiert  $u_1 = U(\phi_1) > t_1$ , so daß für  $r \geq u_1$

$$(59) \quad 2M(\phi_1, r) < r^{\mu(r)}$$

gilt. Dann wähle man

$$(60) \quad V_0 > 2M(p_1, u_1)$$

und gemäß Lemma 3a ein  $W_0 > V_0$  so, daß für jede Funktion  $G_1(z) \in \{P_0, \varrho_G, W_0\}$  — wobei  $P_0(z) \equiv 1$  —

$$(61) \quad M(G_1, r) < 2$$

für  $r \leq V_0$  gilt. Jetzt nimmt man ein  $T_1 > W_0$ , definiert gemäß (42) und (44) das Polynom  $P_1(z)$  der Klasse  $(\varrho_G, T_1)$  und findet nach Hilfssatz 3b ein  $U_1 = U(P_1) > T_1$  so, daß für  $r \geq U_1$

$$(62) \quad 2M(P_1, r) < r^{\mu(r)}$$

ist.  $v_1 > u_1$  sei so gewählt, daß

$$(63) \quad \frac{1}{2}M(p_1, v_1) > U_1,$$

und  $w_1 > v_1$  so groß, daß alle  $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$  die Ungleichungen

$$(64) \quad \frac{1}{2}M(p_1, r) < M(g_1, r) < 2M(p_1, r)$$

und

$$(65) \quad M(g_1, r) < r^{\mu(r)}$$

in  $[u_1, v_1]$  erfüllen. Für jedes  $g_1(z) \in \{p_1, \varrho_g, w_1\}$  ist nach (60) und (64)

$$(66) \quad M(g_1, u_1) < 2M(p_1, u_1) < V_0,$$

und nach (63) und (64)

$$(67) \quad M(g_1, v_1) > \frac{1}{2}M(p_1, v_1) > U_1.$$

Wir haben also

$$0 < t_1 < u_1 < v_1 < w_1$$

und

$$0 < V_0 < W_0 < T_1 < U_1$$

konstruiert, für die die Gln. (66), (67), (65), (61), (62) die entsprechenden Gln. (49) bis (53) der Induktionsbehauptung im Fall  $n=1$  bilden.

*Allgemeiner Induktionsschritt.* Jetzt nehmen wir an, die Konstruktion sei für  $n=1, 2, \dots, N$  ausgeführt. Schon konstruiert sind die endlichen Teilfolgen

$$\begin{aligned} 0 < t_1 < \dots < t_N < u_N < v_N < w_N \\ 0 < V_0 < \dots < V_{N-1} < W_{N-1} < T_N < U_N. \end{aligned}$$

Man wähle  $t_{N+1} > w_N$  und definiere gemäß (41) und (43) das Polynom  $p_{N+1}(z)$  der Klasse  $(\varrho_g, t_{N+1})$ . Nach Hilfssatz 3b existiert  $u_{N+1} = U(p_{N+1}) > t_{N+1}$  so, daß für  $r \geq u_{N+1}$

$$(68) \quad 2M(p_{N+1}, r) < r^{\mu(r)}$$

gilt. Dann wähle man  $V_N$  gemäß

$$(69) \quad V_N > 2M(p_{N+1}, u_{N+1})$$

und nach Lemma 3 a ein  $W_N > V_N$  so, daß für jede Funktion

$$(70) \quad \begin{aligned} G_{N+1}(z) &\in \{P_N, \varrho_G, W_N\} \\ M(G_{N+1}, r) &< r^{\mu(r)} \end{aligned}$$

für  $r$  in  $[U_N, V_N]$  gilt. Jetzt nimmt man ein  $T_{N+1} > W_N$ , definiert gemäß (42) und (44) das Polynom  $P_{N+1}(z)$  der Klasse  $(\varrho_G, T_{N+1})$ , und bestimmt nach Hilfssatz 3 b ein  $U_{N+1} = U(P_{N+1}) > T_{N+1}$  so, daß

$$(71) \quad 2M(P_{N+1}, r) < r^{\mu(r)}$$

für  $r \geq U_{N+1}$  gilt.  $v_{N+1} > u_{N+1}$  sei so gewählt, daß

$$(72) \quad \frac{1}{2}M(\phi_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1},$$

und  $w_{N+1}$  nach Hilfssatz 3 c so groß, daß alle  $g_{N+1}(z) \in \{\phi_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$

$$(73) \quad \frac{1}{2}M(\phi_{N+1}, r) < M(g_{N+1}, r) < 2M(\phi_{N+1}, r)$$

und

$$(74) \quad M(g_{N+1}, r) < r^{\mu(r)}$$

in  $[u_{N+1}, v_{N+1}]$  erfüllen. Für jedes  $g_{N+1}(z) \in \{\phi_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$  ist nach (69) und (73)

$$(75) \quad M(g_{N+1}, u_{N+1}) < 2M(\phi_{N+1}, u_{N+1}) < V_N,$$

und nach (72) und (73)

$$(76) \quad M(g_{N+1}, v_{N+1}) > \frac{1}{2}M(\phi_{N+1}, v_{N+1}) > U_{N+1}.$$

Wegen

$$\{\phi_N, \varrho_g, w_N\} > \{\phi_{N+1}, \varrho_g, w_{N+1}\}$$

und

$$\{P_N, \varrho_G, W_N\} > \{P_{N+1}, \varrho_G, W_{N+1}\}$$

genügt jedes  $g_{N+1}$  den Gln. (49), (50), (51) für  $n = N + 1$ ,  $k = 1, \dots, N$ , und jedes  $G_{N+1}$  der Gl. (52') mit  $n = N + 1$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ , und der Gl. (52). Aber die Gln. (75), (76), (74), (70), (71) ergeben die Gln. (49), (50), (51) mit  $n = N + 1$ ,  $k = N + 1$ , die Gl. (52') mit  $n = N + 1$ ,  $k = N$  und die Gl. (53) mit  $n = N + 1$ .

Hiermit ist die Induktion beendet.

## II. Die Vertauschbarkeitsrelation $f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$

### § 5. Funktionen, die mit einer gegebenen Funktion vertauschbar sind

An und für sich ist schon die Möglichkeit einer kommutativen Zusammensetzung

$$(1) \quad F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\}$$

der ganzen Funktion  $F(z)$  aus den „vertauschbaren“ ganzen Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  von Interesse. Als Beispiel treten vor allem die Iterierten einer

gegebenen Funktion auf. Die Iterierten einer gegebenen Funktion  $f(z)$  werden induktiv definiert:

$$(2) \quad f_n(z) = z, \quad f_1(z) = f(z), \quad f_{m+1}(z) = f_m\{f(z)\} = f\{f_m(z)\},$$

wobei  $m$  gänzlich und positiv ist. Sie sind offenbar ganz. Wir werden unsere Resultate auch besonders auf die Iterationstheorie anwenden. Für Polynome haben RITT [18], [19] und JACOBSTHAL [20], für gebrochene Funktionen JULIA [21] die Zusammensetzung (1) untersucht. Auf den Fall, daß  $f(z)$  und  $g(z)$  [also auch  $F(z)$ ] Polynome sind, wollen wir nicht eingehen, sondern verweisen auf [18], [19] und [20]. Die Vertauschbarkeit einer ganzen transzendenten Funktion mit einem Polynom kann man wegen des folgenden Satzes 6 weitgehend ausschließen. Im Beweis benutzen wir den

**Hilfssatz 4.** *Zu einer ganzen Funktion  $f(z)$  gebe es zwei reelle positive Zahlen  $c, d$  und ein ganzes  $n > 1$ , so daß*

$$(3) \quad M(f, cr^n) < d\{M(f, r)\}^n;$$

dann ist  $f(z)$  ein Polynom.

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus dem Hadamardschen Satz, der besagt, daß  $\log M(f, r)$  eine konvexe Funktion von  $\log r$  ist. Wir setzen  $\log r = x$ ,  $\log M(f, r) = V(x)$ ,  $\log c = \gamma$ ,  $\log d = \delta$ . (3) nimmt die Form

$$(4) \quad V(nx + \gamma) < nV(x) + \delta.$$

Wir zeigen, daß es reelle  $A$  und  $B$  gibt, so daß

$$V(x) < Ax + B$$

(wenigstens für alle genügend großen  $x$ ). Man nehme ein festes  $x_0 > \text{Max}\left(0, \frac{-\gamma}{n-1}\right)$ , ferner reelle  $A$  und  $B$ , welche die zwei Bedingungen

$$(5) \quad Ax_0 + B > V(x_0)$$

und

$$(6) \quad A\gamma - (n-1)B > \delta$$

gleichzeitig erfüllen, z. B.

$$B = \frac{\gamma V(x_0) - x_0 \delta}{\gamma + (n-1)x_0}, \quad A > \frac{(n-1)V(x_0) + \delta}{\gamma + (n-1)x_0}.$$

Für  $x > \frac{-\gamma}{n-1}$  ist nun  $nx + \gamma > x$ : also mit der Definition

$$nx_0 + \gamma = x_1, \quad nx_{k-1} + \gamma = x_k$$

ist  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ , und  $x_k \rightarrow \infty$ . Nach den obigen Definitionen ist

$$(7) \quad V(x_k) < Ax_k + B,$$

wie man leicht induktiv beweist: Für  $k=0$  ist (7) nach (5) richtig.

Ist  $V(x_{k-1}) < A x_{k-1} + B$ , so ist nach (4)

$$\begin{aligned} V(x_k) &< n V(x_{k-1}) + \delta < n A x_{k-1} + n B + \delta \\ &= A(n x_{k-1} + \gamma) + n B - A \gamma + \delta < A x_k + B \end{aligned}$$

nach (6). Wegen der Konvexität von  $V(x)$  in  $x$  gilt  $V(x) < A x + B$  auch für  $x_k < x < x_{k+1}$ , also für alle  $x \geq x_0$ . Für  $M(f, r)$  bedeutet das

$$M(f, r) < e^B r^A.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher  $f(z)$  ein Polynom.

**Satz 6.** *Das nichtkonstante Polynom  $g(z)$  sei mit der ganzen transzendenten Funktion  $f(z)$  wie in der Gl. (1) angegeben vertauschbar; dann hat  $g(z)$  die Gestalt  $g(z) = z e^{2\pi m i n} + b$ ,  $m$  und  $n$  ganz. Umgekehrt gibt es zu jedem Paar von ganzen Zahlen  $m, n$  und jedem komplexen  $b$  eine ganze transzendenten Funktion  $f(z)$ , die mit  $g(z) = z e^{2\pi m i n} + b$  vertauschbar ist.*

*Beweis.* Es sei  $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Dann ist

$$(8) \quad F(z) = f(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) = a_0 + a_1 f(z) + \dots + a_n (f(z))^n.$$

Für alle genügend großen  $r$  ist

$$(9) \quad |a_0 + \dots + a_n z^n| > \frac{|a_n| r^n}{2} \quad \text{für } |z| > r.$$

Also enthält das Bild von  $|z| > r$  bei der Abbildung  $z \rightarrow g(z) = w$  keinen Punkt der Kreisscheibe  $|w| \leq \frac{|a_n| r^n}{2}$ , und das Bild  $\mathfrak{B}$  von  $|z| \leq r$  enthält die ganze Kreisscheibe. Dann ist

$$(10) \quad \begin{cases} M(F, r) = \text{Max}_{|z| \leq r} |f(a_0 + \dots + a_n z^n)| \\ = \text{Max}_{w \in \mathfrak{B}} |f(w)| \geq \text{Max}_{|w| \leq \frac{|a_n| r^n}{2}} |f(w)| = M\left(f, \frac{|a_n| r^n}{2}\right). \end{cases}$$

Andererseits gibt es ein  $K > 0$ , so daß für  $|w| > K$

$$(11) \quad |a_0 + a_1 w + \dots + a_n w^n| < 2 |a_n| |w|^n$$

ist. Zu  $r$  sei  $z_r^*$  ein solcher Wert, daß

$$M(F, r) = |F(z_r^*)|, \quad |z_r^*| = r.$$

Nach (8) ist dann

$$(12) \quad M(F, r) = F(z_r^*) = |a_0 + a_1 f(z_r^*) + \dots + a_n (f(z_r^*))^n|.$$

Weil  $M(F, r)$  nach  $\infty$  strebt, wird  $|f(z_r^*)| > K$  für alle genügend großen  $r$ ; nach (11) und (12) ist dann

$$(13) \quad M(F, r) < 2 |a_n| |f(z_r^*)|^n \leq 2 |a_n| \{M(f, r)\}^n;$$

also nach (10) und (13)

$$M\left(f, \frac{|a_n| r^n}{2}\right) \leq 2 |a_n| \{M(f, r)\}^n.$$

Auf Grund des Hilfssatzes und der Annahme,  $f(z)$  sei transzendent, erhält man  $n=0$  oder  $n=1$ . Den Fall  $n=0$  haben wir ausgeschlossen. Man hat noch festzustellen, welche linearen Polynome mit einer ganzen transzendenten Funktion vertauschbar sein können.

Es sei

$$(14) \quad f(az + b) = af(z) + b = F(z), \quad a \neq 0.$$

Zuerst sei  $a \neq 1$ . In diesem Falle führen wir die neue Veränderliche  $y$  und die neuen Funktionen  $g^*(y)$ ,  $h(y)$  ein:

$$(15) \quad z = y + \frac{b}{1-a}, \quad f\{z(y)\} = g^*(y), \quad g^*(y) = h(y) + \frac{b}{1-a}.$$

$h(y)$  ist eine ganze transzendenten Funktion von  $y$ . Mit der neuen Bezeichnung erhält man aus (14)

$$(16) \quad h(ay) = ah(y).$$

Es sei  $h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y^k$ . Dann gilt

$$(17) \quad h_k(a^k - a) = 0.$$

Für  $a$  entstehen die beiden Fälle:

$$(i) \quad a \neq 0, \quad a \neq \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right);$$

dann ist  $h_k = 0$ ,  $k=2, 3, \dots$ , im Widerspruch zur Transzendenz von  $h(y)$  und  $f(z)$ ; also kann dieser Fall nicht eintreten

$$(ii) \quad a = \exp\left(2\pi \frac{m}{n} i\right), \quad (m, n \text{ relativ prim}), \quad m \neq 0;$$

dann muß  $h(y)$  die Gestalt

$$(18) \quad h(y) = y \sum_{k=0}^{\infty} h'_k y^{nk}$$

haben, wie aus (17) ersichtlich ist. Jede solche Funktion  $h(y)$  genügt der Gl. (16). Durch die Umkehrung der Transformation (15) erhält man die Funktionen  $f(z)$ , die mit  $ze^{2\pi mi/n} + b$ ,  $m \neq 0$ , vertauschbar sind.

Auch im Fall  $a=1$ , d.h.  $g(z) = z + b$ , ist  $g(z)$  mit transzendenten Funktionen vertauschbar, z.B. mit  $z + \sin\left(\frac{2\pi z}{b}\right)$ . Damit ist der Satz 6 bewiesen.

*Fixpunkte.* Läßt man oben konstante Polynome zu, etwa  $g(z) \equiv a$ , so lautet die Vertauschbarkeitsbedingung:

$$f(a) = a$$

oder, mit der üblichen Bezeichnung:  $a$  ist ein Fixpunkt von  $f(z)$ . Der Wert  $f'(a)$  heißt dann der „Multiplikator“ von  $a$ . Diese Fixpunkte sind sehr wichtig für Untersuchungen über vertauschbare Funktionen und Iterationen, wie man im Laufe des Paragraphen sehen wird.

Zuerst wollen wir einige

**Bezeichnungen und Resultate aus der Iterationstheorie** erwähnen. Beweise findet man in FATOU [5]. Bis zum Ende dieses Paragraphen seien  $f(z)$  und  $g(z)$  ganze transzendente Funktionen. Hat  $f(z)$  einen Picardschen Ausnahmewert, etwa  $A$ , so ist dieser der einzige, und  $f(z)$  hat die Form

$$f(z) = A + P(z) \exp(G(z)),$$

wobei  $P(z)$  ein Polynom und  $G(z)$  eine ganze Funktion ist. Im Fall

$$f(z) = \alpha + (z - \alpha)^r \exp(G(z)), \quad r \geq 0 \text{ ganz,}$$

heißt  $\alpha$  ein „Fatouscher Ausnahmewert“ (höchstens einer existiert).

Die Menge  $\mathfrak{F}(f)$  bestehe aus denjenigen Punkten der komplexen Ebene, wo die Folge  $\{f_n(z)\}$  aller Iterierten nicht normal ist. Der unendlich ferne Punkt wird stets zu  $\mathfrak{F}(f)$  hinzugerechnet.

Ein „abstoßender“ bzw. „anziehender“ Fixpunkt  $n$ -ter Ordnung von  $f(z)$  ( $n$  eine natürliche Zahl) ist ein Fixpunkt von  $f_n(z)$  mit Multiplikator vom Betrag größer bzw. kleiner als 1. Die abstoßenden Fixpunkte jeder Ordnung gehören zu  $\mathfrak{F}(f)$ , die anziehenden jeder Ordnung gehören nicht zu  $\mathfrak{F}(f)$ .

Es seien  $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$  und  $m, n$  zwei natürliche Zahlen; dann gehören  $f_m(z_0)$  wie auch jede Lösung  $\xi$  der Gleichung  $f_n(\xi) = z_0$  zur Menge  $\mathfrak{F}(f)$  — „vollständige Invarianz“ von  $\mathfrak{F}(f)$ .

F.I.  $\mathfrak{F}(f)$  ist eine nicht leere perfekte Menge.

F.II. Jeder Punkt von  $\mathfrak{F}(f)$  ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der  $f_n(z)$ .

F.III. Ein beschränktes Gebiet  $\Delta$ , das den eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert weder im Innern noch auf dem Rande enthält, und im übrigen beliebig ist, sei gegeben; dann gibt es zu jeder Umgebung  $\delta$  eines beliebigen Punktes  $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$  ein  $N(z_0, \delta, \Delta)$ , so daß  $\delta$  durch jedes  $f_n(z)$  mit  $n > N(z_0, \delta, \Delta)$  auf ein Gebiet abgebildet wird, das  $\Delta$  enthält.

F.IV. Für jedes  $c \in \mathfrak{F}(f)$  und für jeden Punkt  $z_0$ , außer dem eventuell vorhandenen Fatouschen Ausnahmewert, gibt es eine Folge  $z_k \rightarrow c$ ,  $k = 1, 2, \dots$  und natürliche Zahlen  $n_k$ , so daß  $f_{n_k}(z_k) = z_0$ .

Im weiteren Verlaufe der Arbeit wird die folgende Bezeichnung häufig verwandt.  $D$  sei ein Gebiet,  $h(z)$  eine in  $D$  erklärte Funktion; dann bedeutet  $h(D)$  das Bildgebiet von  $D$  bei der Abbildung  $z \rightarrow h(z)$ .

Schließlich wollen wir einen erst später benutzten Satz von H. BOHR [22] zitieren.

B. Es sei  $0 < \rho < 1$  und  $\Phi(z)$  eine im Kreis  $K: |z| \leq 1$  reguläre Funktion mit

$$\Phi(0) = 0$$

und

$$\text{Max}_{|z| \leq \rho} |\Phi(z)| = 1.$$

Dann enthält die Bildmenge  $\Phi(K)$  einen Kreisrand  $|z| = r_\rho$  mit  $r_\rho > c$ , wobei  $c = c(\rho)$ , eine positive allein von  $\rho$  [also nicht von  $\Phi(z)$ ] abhängige Konstante ist.

Hilfssätze, in denen die Fixpunkte und die Begriffe der Iterationstheorie eine Rolle spielen.

(i)  $f(z)$  und  $g(z)$  seien miteinander vertauschbar und  $\xi$  sei ein Fixpunkt von  $f(z)$ . Dann ist  $g(\xi)$  auch ein Fixpunkt von  $f(z)$ . Ist  $g'(\xi) \neq 0$ , so haben  $\xi$  und  $g(\xi)$  als Fixpunkte von  $f(z)$  denselben Multiplikator. Beweis: trivial.

(ii)  $f(z)$  und  $g(z)$  seien vertauschbar. Dann folgt

(a) aus  $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ , daß  $g(z_0) \in \mathfrak{F}(f)$ , und

(b)  $\mathfrak{F}(f) \cup \mathfrak{F}(g) \subseteq \mathfrak{F}\{f(g)\}$ .

Beweis. (a) Es sei  $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ . Um  $g(z_0)$  als Mittelpunkt nehmen wir eine beliebig kleine offene Kreisscheibe  $K$ . Um  $z_0$  als Mittelpunkt wählen wir eine so kleine Kreisscheibe  $C$ , daß  $g(C) \subset K$ . Dann nimmt  $f_n(z)$  in  $K$  wenigstens alle Werte an, die  $f_n\{g(z)\} = g\{f_n(z)\}$  in  $C$  annimmt. Weil  $\{f_n(z)\}$  in  $C$  nicht normal ist, nehmen in  $C$  in ihrer Gesamtheit die Funktionen  $f_n(z)$  alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an. Man weiß dann dasselbe von den Funktionen  $f_n(z)$  in  $K$ .  $K$  war beliebig klein. Also ist  $\{f_n(z)\}$  nicht normal in  $g(z_0)$ .

(b) Wir wählen  $z_0 \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$  und  $z_1$  so, daß  $f(z_1) = z_0$ . Nach (a) liegt  $g(z_0)$  in  $\mathfrak{F}\{f(g)\}$ , weil  $g(z)$  und  $f\{g(z)\}$  vertauschbar sind. Aber  $g(z_0) = f\{g(z_1)\}$ , und nach der vollständigen Invarianz von  $\mathfrak{F}\{f(g)\}$  ist somit  $z_1 \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$ . Jetzt nehmen wir irgendein  $c \in \mathfrak{F}(f)$ . Dann gibt es nach F.IV eine Folge  $z_v \rightarrow c$  und iterierte  $f_{n_v}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , mit  $f_{n_v}(z_v) = z_0$ ,  $z_0 \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$ . [Bei der Wahl von  $z_0 \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$  hat man darauf zu achten, daß  $z_0$  nicht der eventuell vorhandene „Ausnahmepunkt“ ist, was nach F.I möglich ist.] Dann ist nach dem oben Bewiesenen jedes  $z_v \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$ .  $\mathfrak{F}\{f(g)\}$  ist nach F.I perfekt und damit abgeschlossen; also ist  $c = \lim_{v \rightarrow \infty} z_v \in \mathfrak{F}\{f(g)\}$ .

Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen ist nicht bloß  $\mathfrak{F}(f) \subseteq \mathfrak{F}\{f(g)\}$ , sondern auch

$$\mathfrak{F}(f) \cup \mathfrak{F}(g) \subseteq \mathfrak{F}\{f(g)\}.$$

Die Bedingung (b) stellt eine ziemlich starke, wenn auch unübersichtliche Einschränkung der ganzen Funktionen dar, die mit einer gegebenen ganzen Funktion vertauschbar sind. Als Anwendung von (b) beweisen wir die Behauptung

(iii)  $f(z)$  und  $g(z)$  seien miteinander vertauschbar und mögen einen gemeinsamen Fixpunkt  $c$  haben; es sei ferner  $c \in \mathfrak{F}(f)$  [also ist  $|f'(c)| \geq 1$ ]; dann ist  $|g'(c)| \geq 1$ .



*Beweis.* Es sei  $|g'(c)| = |a_1| < 1$ ; dann wählen wir  $n$  so, daß

$$|g_n'(c)| = |a_1|^n < \frac{1}{|f'(c)|}.$$

Es ist

$$f\{g_n(c)\} = c, \quad \frac{df g_n(z)}{dz} \Big|_{z=c} = |a_1|^n |f'(c)| < 1,$$

woraus folgt, daß  $c \notin \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$ . Dies ist aber ein Widerspruch, da auf Grund der Vertauschbarkeit von  $f(z)$  und  $g_n(z)$  nach (b)  $c \in \mathfrak{F}\{f(g_n)\}$ .

(iv)  $f(z)$  und  $g(z)$  seien miteinander vertauschbar; wenn  $f(z)$  den Fatouschen Ausnahmewert  $\xi$  hat, so ist  $\xi$  auch für  $g(z)$  Fatouscher Ausnahmewert.

*Beweis.* Es gibt zwei Fälle.

(a)  $f(z) = \xi$  hat nur die Wurzel  $z = \xi$  und  $f(z)$  die Form

$$f(z) = \xi + (z - \xi)^r \exp Q(z),$$

$r > 0$  ganz,  $Q(z)$  ganze Funktion.

Wenn  $g(z) = \xi$  entweder keine Wurzel oder nur die Wurzel  $z = \xi$  hat, so ist  $\xi$  Fatouscher Ausnahmewert von  $g(z)$ . Wir nehmen an, daß es eine Wurzel  $z = \eta \neq \xi$  von  $g(z) = \xi$  gibt, und werden einen Widerspruch herleiten. Weil  $\eta \neq \xi$  ist, gibt es unendlich viele  $\theta$  mit  $f(\theta) = \eta$ . Aus  $f\{g(\theta)\} = g\{f(\theta)\} = g(\eta) = \xi$  folgt aber  $g(\theta) = \xi$ . Durch Wiederholung dieses Beweises zeigt man, daß  $g(z)$  in jedem der Werte  $(f_n)^{-1}(\eta)$ , d. h. der Werte  $\alpha$  mit  $f_n(\alpha) = \eta$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) den Wert  $\xi$  hat.

Aus der Iterationstheorie (F. IV) weiß man, daß diese Menge im Endlichen Häufungspunkte hat, und zwar die Punkte der perfekten Menge  $\mathfrak{F}(f)$ . Die  $\xi$ -Punkte der transzendenten Funktion  $g(z)$  können aber keinen endlichen Häufungspunkt haben.

(b)  $f(z) = \xi$  hat keine Wurzel. Dann ist es klar, daß  $g(z) = \xi$  höchstens die Wurzel  $z = \xi$  besitzt.

Es ist bemerkenswert, daß Vertauschbarkeit von  $g(z)$  mit einer gegebenen Funktion  $f(z)$  ganz allgemein eine Einschränkung des Wachstums von  $g(z)$  durch die Iterierten  $f_n(z)$  bedeutet.

**Satz 7.**  $f(z)$  und  $g(z)$  seien vertauschbar; dann gibt es eine ganze positive Zahl  $n$  und ein  $R_0 > 0$ , so daß für alle  $r > R_0$

$$M(f_n, r) > M(g, r).$$

*Beweis.*  $z_0$  sei ein Punkt in  $\mathfrak{F}(f)$ ; wenn  $f(z)$  einen Fatouschen Ausnahmewert  $\xi$  besitzt, wählen wir ein solches  $z_0$ , daß  $|z_0 - \xi| > 2$  ist. Es sei  $K$  ein Kreis vom Radius 1 um den Punkt  $z_0$ . Falls  $f(z)$  nun den Ausnahmewert  $\xi$  besitzt, ist  $\xi$  nach (iv) auch Ausnahmewert von  $g(z)$ ; weil  $\xi \notin K$ , ist also  $\xi \notin g(K)$ . Es gibt somit stets eine ganze positive Zahl  $m$ , so daß  $f_m(K)$  das beschränkte, das eventuell vorkommende  $\xi$  nicht enthaltende Gebiet  $g(K)$  überdeckt (F. III). Wir können  $m$  sogar so wählen, daß  $f_{m'}(K) \supset g(K)$  für alle  $m' > m$  ist.

$z_0$  ist ein Häufungspunkt von Fixpunkten der Iterierten  $f_v(z)$ ; also gibt es ein  $\eta$  mit

$$|\eta - z_0| < \frac{1}{3}, \quad f_p(\eta) = \eta.$$

Es sei  $K'$  der größte Kreis um  $\eta$  als Mittelpunkt, der in  $K$  enthalten ist.  $K'$  enthält  $z_0$  im Innern und habe den Radius  $r'$ . Wir können o.B.d.A. annehmen,  $p$  sei so groß gewählt, daß

$$(19) \quad f_p(K) \supset K$$

und

$$(20) \quad f_p(K) \supset g(K).$$

Durch die lineare Transformation  $w = \frac{z - \eta}{r'}$  bilde man jetzt den Kreis  $K'$  (vom Radius  $r'$ ) auf den Einheitskreis  $|w| \leq 1$  ab und wende den oben zitierten Bohrschen Satz B auf die Funktion

$$\Phi(w) = \frac{f_{np}(\eta + r'w) - \eta}{\text{Max}_{z \in K''} |f_{np}(z) - \eta|}$$

an, wobei  $K''$  der um  $\eta$  als Mittelpunkt beschriebene Kreis vom Radius  $\frac{3}{4}r'$  ist, der dem Kreis  $|w| \leq \frac{3}{4}$  bei der Transformation entspricht. In Satz B ist  $\varrho = \frac{3}{4}$  zu wählen. Man findet  $f_{np}(K')$  und a fortiori  $f_{np}(K)$  enthält einen Kreisrand um den Mittelpunkt  $\eta$ , dessen Radius mindestens

$$(21) \quad c\left(\frac{3}{4}\right) \text{Max}_{z \in K''} |f_{np}(z) - \eta|$$

beträgt. Weil  $K''$  den Punkt  $z_0$  in seinem Innern enthält, strebt der Ausdruck (21) gegen  $\infty$  für  $n \rightarrow \infty$  (F.III). Für großes  $n$  enthält also  $f_{np}(K)$  einen größten Kreisrand  $C_n$  um  $\eta$ , dessen kleinster Abstand vom Nullpunkt größer als

$$(22) \quad \varrho_n = \frac{1}{2} c\left(\frac{3}{4}\right) \text{Max}_{z \in K''} |f_{np}(z)|$$

ist. Für eine geeignete ganze positive Zahl  $a$  ist nun, wegen  $z_0 \in K''$ ,

$$f_{ap}(K'') \supset K,$$

und

$$f_{(n+a+1)p}(K'') \supset f_p\{f_{np}(K)\} \supset f_p(C_n).$$

Also ist

$$(23) \quad \text{Max}_{z \in K''} |f_{(n+a+1)p}(z)| \geq \text{Max}_{z \in C_n} |f_p(z)| \geq \frac{4}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} \text{Min}_{z \in C_n} |z| \geq \frac{4\varrho_n}{c^2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{c\left(\frac{3}{4}\right)} \text{Max}_{z \in K''} |f_{np}(z)|$$

für alle genügend großen  $\varrho_n$  (also  $n$ ) — im folgenden wird diese letzte Bedingung nicht mehr ausdrücklich erwähnt. Für den kleinsten Abstand  $A_n$  des Kreisrandes von  $C_n$  vom Nullpunkt gilt nach (22), (23):

$$(24) \quad A_n > \varrho_n > \text{Max}_{z \in K''} |f_{(n-a-1)p}(z)| = R_n.$$

Wegen (19) ist  $R_{n+1} > R_n$ . Man nehme ein  $\varrho$  mit  $R_n < \varrho < R_{n+1}$ . Dann gilt

$$(25) \quad M(g, \varrho) < M(g, R_{n+1}) \leq \text{Max}_{z \in C_{n+1}} |g(z)| \leq \text{Max}_{z \in f_{(n+1)p}(K)} |g(z)|.$$

Es ist nach (20)

$$(26) \quad g\{f_{(n+1)p}(K)\} = f_{(n+1)p}\{g(K)\} < f_{(n+2)p}(K).$$

Wir bemerken weiter, daß  $\bar{K}_n$  — die abgeschlossene Kreisscheibe  $|z| \leq R_n$  — das Gebiet  $f_{(n-2a-1)p}(K)$  enthält, weil  $f_{ap}(K'') > K$  und (24) gilt.

Hieraus folgt, daß

$$f_{(2a+3)p}(\bar{K}_n) > f_{(2a+3+n-2a-1)p}(K) = f_{(n+2)p}(K),$$

und wegen (25), (26)

$$\begin{aligned} M(g, \varrho) &< \operatorname{Max}_{z \in f_{(n+1)p}(K)} |g(z)| \leq \operatorname{Max}_{z \in f_{(n+2)p}(K)} |z| \leq \operatorname{Max}_{z \in \bar{K}_n} |f_{(2a+3)p}(z)| \\ &= M(f_{(2a+3)p}, R_n) < M(f_{(2a+3)p}, \varrho). \end{aligned}$$

Der Herleitung nach gilt die Ungleichung

$$M(g, \varrho) < M(f_{(2a+3)p}, \varrho)$$

für alle genügend großen  $\varrho$ .

### § 6. Der Fall $e^z$

Welche ganzen Funktionen sind mit einer gegebenen  $f(z)$  vertauschbar? Es ist klar, daß alle die Iterierten  $f_n(z)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , diese Eigenschaft haben. Im Beweis von Satz 6 haben wir Funktionen  $f(z)$  gefunden, die mit anderen Funktionen vertauschbar sind, die keine Iterierten von  $f(z)$  sind. Insbesondere war Vertauschbarkeit mit gewissen linearen Polynomen möglich. Es kann jedoch vorkommen, daß jede nicht konstante, mit  $f(z)$  vertauschbare ganze Funktion eine Iterierte  $f_n(z)$  ist. Ein Beispiel dafür ist die Exponentialfunktion. Allgemeiner gilt der

**Satz 8.**  $g(z)$  sei eine mit  $f(z) = ae^{bz} + c$  vertauschbare ganze Funktion; dabei sollen  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  vorausgesetzt werden. Dann ist  $g(z)$  (i) eine Konstante [Fixpunkt von  $f(z)$ ], oder (ii)  $g(z) = z$ , oder (iii)  $g(z) = f_n(z)$  für ein ganzes  $n \geq 1$ .

*Beweis.* Ist  $g(z)$  ein nichtkonstantes Polynom, so hat dieses nach Satz 6 die Form

$$g(z) = \alpha z + \beta, \quad |\alpha| = 1.$$

Die Vertauschbarkeitsbedingung lautet

$$\alpha a e^{bz} + \alpha c + \beta = a \exp(b\alpha z + b\beta) + c = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

Aus

$$\frac{2d_2}{d_1} = b = b\alpha$$

folgt  $\alpha = 1$ , und aus

$$d_1 = b\alpha a = b\alpha a e^{b\beta}$$

folgt zuerst  $e^{b\beta} = 1$ , und weil

$$d_0 = \alpha a + \alpha c + \beta = a e^{b\beta} + c$$

ist schließlich  $\beta = 0$ .

Es sei also  $g(z)$  transzendent.  $f(z)$  hat den Fatouschen Ausnahmewert  $c$ , der folglich auch für  $g(z)$  Fatouscher Ausnahmewert ist [§ 5 (IV)]:

$$(27) \quad g(z) = c + (z - c)^m \exp P(z), \quad m \geq 0 \text{ ganz,}$$

wobei  $P(z)$  eine ganze Funktion ist.

(a) Wir führen die Annahme, es sei  $m > 0$  und damit  $g(c) = c$  auf einen Widerspruch zurück. Aus der Vertauschbarkeit folgt:

$$\begin{aligned} a \exp\{b g(z)\} + c &= g(a e^{bz} + c) = g\left[a \exp\left\{b\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c\right] \\ &= a \exp\left\{b g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right)\right\} + c \end{aligned}$$

und somit

$$(28) \quad g\left(z + \frac{2\pi i}{b}\right) = g(z) + \frac{2\pi N i}{b}, \quad N \text{ ganz.}$$

Weil  $g(z) = c$  allein für  $z = c$  gilt, ist  $g(z)$  nicht periodisch, also  $N \neq 0$ . Ist andererseits  $N \neq 0$ , so nimmt  $g(z)$  den Wert  $c - \frac{2\pi N i}{b}$  unendlich oft in geeigneten  $\xi_1, \xi_2, \dots$  an. In  $\xi_1 + \frac{2\pi i}{b}, \xi_2 + \frac{2\pi i}{b}, \dots$  nimmt aber nach (28)  $g(z)$  den Wert  $c$  an. Das widerspricht aber der Gl. (27).

(b) In (27) bleibt nur noch der Fall  $m = 0$  zu untersuchen. Weil  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  gilt, können wir (27) in der Form schreiben:

$$(29) \quad g(z) = c + a \exp b g_{(1)}(z) = f\{g_{(1)}(z)\},$$

wobei  $g_{(1)}(z)$  eine ganze Funktion ist. Wegen der Vertauschbarkeit von  $g(z)$  und  $f(z)$  ist

$$c + a \exp\{b c + b a \exp\{b g_{(1)}(z)\}\} = c + a \exp\{b g_{(1)}(c + a e^{bz})\},$$

woraus folgt

$$c + a \exp\{b g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a e^{bz}) + \frac{2\pi M i}{b}, \quad M \text{ ganz.}$$

Weil die Funktion  $g(z)$  sich nicht ändert, wenn  $g_{(1)}(z)$  durch  $g_{(1)}(z) + \frac{2\pi M i}{b}$  ersetzt wird, dürfen wir  $M = 0$  setzen; d. h.  $g_{(1)}(z)$  ist vertauschbar mit  $f(z)$ :

$$c + a \exp\{b g_{(1)}(z)\} = g_{(1)}(c + a e^{bz}).$$

Wir wenden die für  $g(z)$  oben gewonnenen Ergebnisse auf  $g_{(1)}(z)$  an. Entweder ist  $g_{(1)}(z) = z$  und hiermit  $g(z) = f(z)$  oder  $g_{(1)}(z)$  ist transzendent. In diesem Fall hat  $g_{(1)}(z)$  die Gestalt

$$(29') \quad g_{(1)}(z) = f\{g_{(2)}(z)\}, \quad g_{(2)}(z) \text{ eine ganze Funktion,}$$

wobei  $f\{g_{(2)}(z)\} = g_{(2)}\{f(z)\}$ . Auf diese Weise fortfahrend beweist man, daß entweder

$$(30) \quad g(z) = f_m(z), \quad m > 0 \text{ ganz,}$$

oder daß es zu jedem ganzen  $n > 0$  eine transzendente  $g_{(n)}(z)$  gibt, so daß

$$(31) \quad g(z) = f_n \{g_{(n)}(z)\}, \quad g_{(n)}\{f(z)\} = f\{g_{(n)}(z)\}.$$

Wir führen die Funktionen  $Q_{(n)}(z) = g_{(n)}(z) - g_{(n)}(0)$  und  $F_{(n)}(z) = f_n(g_{(n)}(0) + z)$  ein. Dann ist

$$g(z) = F_{(n)}\{Q_{(n)}(z)\},$$

und

$$Q_{(n)}(0) = 0.$$

Nach PÓLYA's Satz von § 2 ist für jedes  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$M(g, r) > M\left\{F_{(n)}, cM\left(Q_{(n)}, \frac{r}{2}\right)\right\} > M\left\{F_{(n)}, c\left(\frac{r}{2}\right)^2\right\} > M(f_n, r)$$

für alle genügend großen  $r$ .

Weil der Fall (31) also gegen Satz 7 verstößt, kann nur der Fall (30) eintreten. Damit ist der Satz bewiesen.

Obwohl es ganze Funktionen  $f(z)$  gibt, die allein mit den eigenen Iterierten und konstanten Funktionen  $c$  mit  $f(c) = c$  vertauschbar sind, ist dies sicherlich nicht immer der Fall. Wir kennen schon Beispiele von transzendenten Funktionen  $f(z)$ , die mit linearen Polynomen vertauschbar sind, und durch Zusammensetzung von diesen Polynomen und den Iterierten von  $f(z)$  erhält man weitere mit  $f(z)$  vertauschbare Funktionen, die keine Iterierten von  $f(z)$  sind. So ist z. B.  $z + \sin z$  mit  $z + 2k\pi$  vertauschbar ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) und folglich auch mit  $(z + 2k\pi) + \sin(z + 2k\pi) = 2k\pi + z + \sin z$ .

### § 7. Ein Problem von SZEKERES

In diesem Paragraphen bringen wir die Lösung eines von G. SZEKERES gestellten Problems: *Läßt sich jedem  $\alpha \geq 0$  eine nichilineare ganze Funktion  $f(\alpha, z)$  so zuordnen, daß die  $f(\alpha, z)$  eine im Parameter stetige Familie bilden und es gilt*

$$f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z)?$$

Diese Frage wird durch den Satz 9 beantwortet.

**Satz 9.** *Es gibt keine Familie von Funktionen  $f(\alpha, z)$ ,  $\alpha \geq 0$ , mit den Eigenschaften:*

$$(32) \quad f\{\alpha, f(\beta, z)\} = f(\alpha + \beta, z),$$

$$(32') \quad f(0, z) = z,$$

$$(33) \quad f(\alpha, z) \text{ ist für jedes } \alpha > 0 \text{ eine ganze Funktion von } z,$$

$$(34) \quad \text{für mindestens ein } \alpha_0 > 0 \text{ ist } f(\alpha_0, z) \text{ keine lineare Funktion,}$$

und

$$(35) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, z) = z.$$

*Beweis.* Nehmen wir an, es gäbe eine solche Funktionenfamilie. Zuerst sei in (34)  $f(\alpha_0, z)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades,  $n > 1$ . Dann ist  $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$  und allgemein  $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$  ein Polynom; denn ist  $g(z)$  eine ganze transzendente Funktion, so folgt die Transzendenz von  $g\{g(z)\}$  aus dem Picardschen Satz. Man braucht nur die Lösungen der Gleichung  $g\{g(z)\} = \text{const}$  zu betrachten. Das Polynom  $f\left(\frac{\alpha_0}{2}, z\right)$  hat einen geringeren Grad,  $f\left(\frac{\alpha_0}{4}, z\right)$  einen noch geringeren und schließlich  $f\left(\frac{\alpha_0}{2^n}, z\right)$  einen Grad  $\leq 1$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß  $f(\alpha_0, z)$  einen Grad  $n > 1$  hat.

Jetzt seien alle  $f(\alpha, z)$  transzendent. Jedes  $f(\alpha, z)$  hat Fixpunkte; hätte  $f(\alpha, z)$  nämlich keinen Fixpunkt, so hätte auch  $f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)$  keinen Fixpunkt, und die Funktion

$$\frac{f(\alpha, z) - z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right) - z} = \frac{f\left\{\frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right)\right\} - z}{f\left(\frac{\alpha}{2}, z\right) - z}$$

wäre eine ganze Funktion, die weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt. Zu festem  $\alpha_0 > 0$  betrachten wir die Fixpunkte von  $f(m\alpha_0, z)$  mit ganzzahligem  $m > 0$ , die innerhalb des Kreises  $|z| < R$  liegen. Sie seien mit  $\xi_1, \dots, \xi_n$  bezeichnet. Für beliebiges  $\alpha > 0$  ist nach (32)  $f(\alpha, z)$  mit  $f(m\alpha_0, z)$  vertauschbar; nach § 5 (1) ist  $f(\alpha, \xi_i)$ ,  $i = 1 \dots n$ , ein Fixpunkt von  $f(m\alpha_0, z)$ . Nach (35) strebt  $f(\alpha, \xi_i) \rightarrow \xi_i$  für  $\alpha \rightarrow 0$ ; für  $\alpha < \delta_i$  ist also  $f(\alpha, \xi_i) = \xi_i$  und für geeignetes  $\delta(R) > 0$  ist  $f(\alpha, \xi_i) = \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , für  $\alpha < \delta(R)$ . Wir nehmen insbesondere  $\alpha = \frac{\alpha_0}{2^N}$  und dabei  $N$  so groß, daß  $\frac{\alpha_0}{2^N} < \delta(R)$ . Dann ist

$$f\left(\frac{\alpha_0}{2^N}, \xi_i\right) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

und daher

$$f(\alpha_0, \xi_i) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Indem wir  $R$  beliebig groß wählen, sehen wir, daß jeder Fixpunkt von  $f(m\alpha_0, z)$  zugleich Fixpunkt von  $f(\alpha_0, z)$  ist. Das Umgekehrte ist ja klar. Dabei ist die ganze Zahl  $m > 0$  beliebig wählbar; also haben alle  $f(m\alpha_0, z)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  die gleichen Fixpunkte, die eine isolierte Punktmenge bilden. Damit haben wir einen Widerspruch zu § 5, F.I und F.II hergeleitet und Satz 9 bewiesen.

Wenn man die Forderung (34) fällen läßt, ist Satz 9 nicht gültig. Die stetigen linearen Familien

$$f(\alpha, z) = e^{\alpha b} z + c(e^{\alpha b} - 1), \quad b, c \text{ konst.},$$

und

$$f(\alpha, z) = z + \alpha b, \quad b \text{ konst.}$$

die sogar einparametrische Transformationsgruppen bilden, sind wohlbekannt.

**§ 8. Die Zerlegung einer gegebenen Funktion von endlicher Ordnung  
in miteinander vertauschbare Funktionen**

Jetzt verlassen wir die allgemeineren Fragen von § 5 und § 6 und untersuchen, insbesondere für spätere Anwendung in der Iterationstheorie, das folgende Problem: *Wann läßt eine gegebene ganze Funktion  $F(z)$  von endlicher Ordnung eine Zerlegung*

$$(36) \quad F(z) = f\{g(z)\}, \quad f(z), g(z) \text{ ganze transzendente Funktionen,}$$

*und spezieller eine vertauschbare Zerlegung*

$$(37) \quad F(z) = f\{g(z)\} = g\{f(z)\}, \quad f(z), g(z) \text{ ganze transzendente Funktionen,}$$

zu?

PÓLYA fand durch Anwendung seines in § 2 zitierten Satzes bezüglich (36) das Ergebnis: Entweder ist (a)  $g(z)$  ein Polynom und  $f(z)$  eine Funktion von endlicher Ordnung, oder (b)  $f(z)$  hat die Ordnung 0 und  $g(z)$  endliche Ordnung. Im Fall (37) haben also  $f(z)$  und  $g(z)$  beide die Ordnung 0.

Unter Berücksichtigung von § 4 Satz 3 und Zusatz können wir sofort den Satz aussprechen:

**Satz 10.**  *$F(z)$  lasse die Zerlegung (37) zu und habe endliche Ordnung: dann existiert zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  eine Folge von geschlossenen Jordan-Kurven  $\Gamma_i$ , die den Nullpunkt im Innern enthalten und außerdem folgende Eigenschaften haben:  $\underline{\sigma}_i$  und  $\bar{\sigma}_i$  seien die kleinste bzw. größte Entfernung zwischen dem Nullpunkt und  $\Gamma_i$ ; dann gilt*

$$(i) \quad \underline{\sigma}_i \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad \bar{\sigma}_i < \underline{\sigma}_i^{1+\varepsilon},$$

$$(iii) \quad |F(z)| = |f\{g(z)\}| > \{M(F, \bar{\sigma}_i)\}^{1-\varepsilon} \quad \text{für } z \in \Gamma_i.$$

Diese sehr starke Bedingung könnte man folgendermaßen formulieren: Das obere Wachstum von  $F(z)$  entlang irgendeiner nach  $\infty$  laufenden Kurve ist von der gleichen Größenordnung wie  $M(F, r)$ . Aus Satz 10 folgt, daß viele bekannten Klassen ganzer Funktionen von endlicher Ordnung keine transzendente Zerlegung (37) zulassen. Offenbar verletzen Funktionen mit einem Zielwert oder Beschränktheitsweg die notwendige Wachstumsbedingung; darunter befinden sich die Funktionen mit einem Picardschen oder Borelschen Ausnahmewert. Eine weitere Klasse bilden die Funktionen  $F$  von der genauen endlichen Ordnung  $\rho$ , für die in einem Winkelraum  $W$  oder nur auf einer nach  $\infty$  laufenden Kurve  $I'$

$$F(z) = o\{\exp(|z|^{e-\delta})\}, \quad \delta > 0, \quad z \in W \text{ oder } I'$$

gilt; dazu gehören, wie BIEBERBACH [24], [25] gezeigt hat, die Funktionen von endlicher Ordnung  $\rho$ , die in einem Winkelraum mit einer größeren

Öffnung als  $\pi/q$  mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annehmen oder in irgendeinem Winkelraum schlicht sind.

Als Beispiele für Funktionen, die keine Zerlegung (37) zulassen, hat man  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\frac{1}{\Gamma(-z)}$ ,

$$F(z) = P(z, e^z, e^{z^2}, \dots, e^{z^m}),$$

wobei  $P(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$  ein solches Polynom in  $x_1, \dots, x_{m+1}$  ist, das in  $x_{m+1}$  einen nicht verschwindenden Grad hat. Die negative reelle Achse ist ein Beschränktheitsweg für die ersten vier Beispiele, und auf  $\arg z = \pi/m$  hat  $F(z)$  höchstens die Ordnung  $(m-1)$ , während die Ordnung von  $F(z)$  auf der reellen positiven Achse genau  $m$  ist. Besonders interessant sind die Funktionen mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, also Funktionen der Form

$$F(z) = z + Q(z) \exp\{R(z)\}, \quad Q(z), R(z) \text{ Polynome,}$$

die offenbar einen Beschränktheitsweg haben. Diese Funktionen lassen keine Zerlegung (37) zu. ROSENBLOOM [26], [27] hat gezeigt, daß die erweiterte Klasse, die man durch Fallenlassen der Beschränkung auf endliche Ordnung erhält, auch aus lauter unzerlegbaren Funktionen besteht. Zum Beweis braucht man allerdings den zweiten Hauptsatz der meromorphen Funktionen. ROSENBLOOM's Resultat ist das einzige uns bekannte, früher veröffentlichte Ergebnis auf diesem Gebiet, außer ein paar Bemerkungen über das speziellere Problem der Iterierten.

### § 9. Iterationen

Die Iterierten einer ganzen Funktion sind miteinander vertauschbar; wenn  $f_m(z)$ ,  $m > 0$  ganz, transzendent ist, kann  $f(z)$  kein Polynom sein. Durch Umschreiben des Satzes 10 erhält man den

**Satz 11.**  *$F(z)$  sei eine ganze transzendente Funktion von endlicher Ordnung, die eine  $m$ -te Iterierte,  $m > 1$  ganz, ist. Dann hat  $F(z)$  die in Satz 10 formulierten Eigenschaften.*

$$(38) \quad f_m(z) = F(z), \quad F(z) \text{ eine gegebene ganze Funktion.}$$

Wir bemerken, daß die Gl. (38), falls sie überhaupt von ganzem  $f(z)$  zu lösen ist, keineswegs eindeutig lösbar zu sein braucht; z.B. hat

$$f\{f(z)\} = z + \sin z + \sin(z + \sin z)$$

außer der Lösung  $f(z) = z + \sin z$  die weiteren Lösungen

$$f^{(k)}(z) = 2k\pi - z - \sin z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

wie leicht nachzurechnen ist. Beispiele von „Nicht-Iterierten“ sind die schon in § 8 erwähnten Funktionenklassen. Die Existenz von Iterierten von endlicher Ordnung ist von BAKER [8] diskutiert worden.



**§ 10. Die zweiten Iterierten; die ganzen Lösungen  $f(z)$  der Funktionalgleichung  $f\{f(z)\} = F(z)$  für ganzes  $F(z)$**

In diesem Paragraphen werden einige Resultate über die Beschaffenheit von zweiten Iterierten gebracht, wobei die Beschränkung auf endliche Ordnung durch allgemeinere Wachstumsbedingungen ersetzt wird.

Iterieren wir die reelle Funktion  $\exp(r^A)$ ,  $A > 0$ , so erhalten wir  $\exp\{\exp(Ar^A)\}$ . Falls  $f(z)$  von endlicher Ordnung  $A$  ist, so ist also

$$(39) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M\{f\{f(z)\}, r\}}{\log r} \leq A.$$

Wir nehmen jetzt an, daß ein solches  $f(z)$  vorliegt, so daß (39) gilt. Was können wir dann über das Wachstum von  $f(z)$  sagen?

**Satz 12.**  $f(z)$  sei eine ganze Funktion mit

$$(39) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M\{f\{f(z)\}, r\}}{\log r} \leq A, \quad 0 \leq A < \infty;$$

dann hat  $f(z)$  entweder (i) die Ordnung  $\leq A$  oder (ii) die Ordnung von  $f(z)$  ist größer als  $A$  und die untere Ordnung  $\underline{\rho} = 0$ , wobei

$$\underline{\rho} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(f, r)}{\log r}$$

*Beweis.* Nehmen wir an, die Ordnung von  $f(z)$  sei größer als  $A$ . Um eine Abschätzung nach unten für  $M\{f(f), r\}$  zu erhalten, erinnern wir an den Satz (§ 2) von PÓLYA. Weil die innere Funktion (um diesen Satz anwenden zu können) im Nullpunkt verschwinden muß, setzen wir

$$f(z) = F(z) + a, \quad \text{wobei} \quad a = f(0).$$

Dann ist

$$f\{f(z)\} = F_1\{F(z)\},$$

wobei

$$F_1(z) = f(z + a).$$

PÓLYA's Satz ergibt

$$M\{f(f), r\} > M\left\{F_1, cM\left(F, \frac{r}{2}\right)\right\}$$

für alle großen  $r$ . Es ist nun

$$M(F_1, \varrho) = \text{Max}_{|z| \leq \varrho} |f(z + a)| \geq \text{Max}_{|z| \leq \varrho - |a|} |f(z)| = M(f, \varrho - |a|)$$

für alle  $\varrho > |a|$ . Also ist

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} M\{f(f), r\} > M\left\{f, cM\left(F, \frac{r}{2}\right) - |a|\right\} \\ > M\left\{f, cM\left(f, \frac{r}{2}\right) - 2|a|\right\} \\ > M\left\{f, dM\left(f, \frac{r}{2}\right)\right\} \end{array} \right.$$

für ein geeignetes  $0 < d < 1$  und alle genügend großen  $r$ .

Weil die Ordnung von  $f(z)$  größer als  $A$  ist, gibt es eine Folge  $\{r_i\}$  mit  $r_i \rightarrow \infty$ , für die

$$dM\left(f, \frac{r_i}{2}\right) > d \exp\left\{\left(\frac{r_i}{2}\right)^{A+\varepsilon'}\right\} > \exp(r_i^{A+\varepsilon})$$

für genügend kleine, aber sonst beliebig vorgegebene  $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ . Nach (39), (40) ist dann

$$(41) \quad M(f, \exp r_i^{A+\varepsilon}) < M\{f(f), r_i\} < \exp\{\exp r_i^{A+\delta}\}$$

für alle genügend großen  $r_i$ , wobei man  $0 < \delta < \varepsilon$  annehmen darf. Wir setzen  $\exp(r_i^{A+\varepsilon}) = \varrho_i$ . Die Ungleichung (41) wird dann zu

$$M(f, \varrho_i) < \exp \exp \left\{ (\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}} \right\}.$$

Es strebt  $\log \varrho_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$ , und es ist  $\frac{A+\delta}{A+\varepsilon} < 1$ . Daher ist zu beliebig großem vorgegebenen  $L > 0$

$$(\log \varrho_i)^{\frac{A+\delta}{A+\varepsilon}} < \frac{1}{L} \log \varrho_i \quad \text{für großes } i,$$

und somit

$$M(f, \varrho_i) < \exp \exp \log(\varrho_i^{1/L}) = \exp(\varrho_i^{1/L}).$$

Also ist die untere Ordnung  $\varrho$  nicht größer als  $1/L$ , d. h.  $\varrho = 0$ .

*Zusatz.* Setzt man in (39) Gleichheit voraus, so wird der Fall (i) zu (i'): die Ordnung von  $f(z)$  ist gleich  $A$ , oder es gilt (ii).

Auf Grund des Satzes 12 kann man verschiedene Sätze über die zweite Iterierte herleiten.

**Satz 13.** *Es sei  $f(z)$  eine ganze Funktion, für die die Ungleichung (39) erfüllt ist. Dann kann die zweite Iterierte  $g(z) = f\{f(z)\}$  höchstens  $2[2A]$  numerisch verschiedene endliche Zielwerte haben.*

Hierbei bedeutet  $[2A]$  die größte ganze Zahl  $m \leq 2A$ .

*Beweis.*  $g(z)$  habe die  $n$  numerisch verschiedenen Zielwerte  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; d. h. es gebe stetige, nach unendlich laufende Kurven  $\Gamma_i$ :  $z = z_i(t)$ ,  $0 \leq t < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so daß

$$\lim_{t \rightarrow 1} |z_i(t)| = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} g\{z_i(t)\} = c.$$

Bei der Abbildung  $z \rightarrow f(z)$  entsteht das Bild  $f(\Gamma_i)$  von  $\Gamma_i$ ; dieses Bild ist auch eine stetige Kurve, und zwar mit demselben Parameter  $t$  wie in  $\Gamma_i$ :

$$f(\Gamma_i): f\{z_i(t)\}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Es ergibt sich die Frage: Wie verhält sich  $f\{z_i(t)\}$  für  $t \rightarrow 1$ ?

Entweder hat  $f(\Gamma_i)$  (i) keinen Häufungspunkt im Endlichen, läuft also nach Unendlich oder (ii)  $f(\Gamma_i)$  hat wenigstens einen endlichen Häufungs-

punkt  $\alpha_i$ . Aus  $f\{f(z)\} = g(z)$  folgt, daß  $f(\alpha_i) = c_i$  und daß  $f(I_i)$  nur isolierte Häufungspunkte hat. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  können wir um  $\alpha_i$  einen Kreis  $K(\delta)$ :  $|z - \alpha_i| \leq \delta$  finden, auf dessen Peripherie  $|f(z) - f(\alpha_i)| = |f(z) - c_i| > \varepsilon$  ist. Innerhalb von  $K(\delta)$  liegen Punkte  $f\{z_i(t)\}$  von  $f(I_i)$ , für die  $t$  beliebig nahe bei 1 liegt und  $|g\{z_i(t)\} - c_i| < \varepsilon$  ist. Weil für alle genügend großen  $t$   $|f\{f\{z_i(t)\}\} - c_i| < \varepsilon$  ist, kann die Kurve  $f(I_i)$  von einem gewissen  $t$  ab den Kreis  $K(\delta)$  nicht mehr verlassen. Es gibt also ein  $t(\delta)$ , so daß  $|f\{z_i(t)\} - \alpha_i| < \delta$  für  $t(\delta) < t < 1$ . Wenn man  $\varepsilon$  beliebig klein wählt, darf man  $\delta$  auch beliebig klein wählen. Also ist im Fall (ii)  $\lim_{t \rightarrow 1} f\{z_i(t)\} = \alpha_i$ , d.h.  $f(z)$  hat auf  $I_i$  den Zielwert  $\alpha_i$ .

Wenn Fall (i) eintritt, hat  $f(z)$  auf  $f(I_i)$  den Zielwert  $c_i$ . Tritt für  $I_i$  und  $I_j$ ,  $i \neq j$ , der Fall (i) ein, so wissen wir schon, daß  $c_i \neq c_j$ ; tritt für beide der Fall (ii) ein, so entsprechen den Wegen  $I_i$  bzw.  $I_j$  die Zielwerte  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_j$  von  $f(z)$ , die wegen  $f(\alpha_i) = c_i \neq c_j = f(\alpha_j)$  numerisch verschieden sind. Jedem Zielwert  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $g(z)$  läßt sich also ein Zielwert von  $f(z)$  zuordnen. Ist  $n \geq 2[2A] + 1$ , so tritt einer der Fälle (i), (ii) mindestens  $([2A] + 1)$ -mal ein. Dann hat  $f(z)$  mindestens  $[2A] + 1$ , also mehr als  $2A$  numerisch verschiedene Zielwerte. Nach dem Satz von DENJOY-CARLEMAN ist dann die Ordnung von  $f(z)$  größer als  $A$  und nach Satz 12 hat  $f(z)$  die untere Ordnung 0. CARLEMAN (vgl. [28, S. 145]) hat bewiesen, daß eine ganze Funktion von unterer Ordnung 0 keinen Beschränktheitsweg (also a fortiori keinen Zielwert) hat. Aus diesem Widerspruch folgern wir die Behauptung des Satzes.

*Bemerkung.* Zwei Zielwerte  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$  von  $f(z)$  mit den zugehörigen Wegen  $I_1$  bzw.  $I_2$  sind sicher „verschieden“, wenn  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ; in der Theorie der ganzen Funktionen (z. B. für die Anwendung des Denjoy-Carlemanschen Satzes) sind sie auch dann als verschieden zu betrachten, wenn  $\alpha_1 = \alpha_2$  ist und zwischen  $I_1$  und  $I_2$  ein nach  $\infty$  laufender Weg liegt, auf dem  $f(z)$  nach  $\infty$  strebt. Wir haben die numerische Verschiedenheit der Zielwerte von  $g(z)$  vorausgesetzt, um die numerische Verschiedenheit (und damit die Verschiedenheit „im erweiterten Sinne“) genügend vieler Zielwerte von  $f(z)$  zu erzwingen. Auf diese Weise umgeht man eine Untersuchung über die Lage der Kurven  $I_i$  und  $f(I_i)$  und über ihre gegenseitigen Beziehungen.

Satz 13 ist schon dann nicht mehr gültig, wenn die Zielwerte verschieden im erweiterten Sinne, aber numerisch gleich sind. Die Funktion  $g(z) = \exp(\exp z)$  erfüllt (39) mit  $A = 1$ ; auf den Halbstrahlen  $y = (2n + 1)\pi$ ,  $x = t$ ,  $0 \leq t < \infty$  hat  $g(z)$  die Zielwerte 0; zwischen diesen Halbstrahlen liegen die Halbstrahlen  $y = 2n\pi$ ,  $x = t$ ,  $0 \leq t < \infty$ ; auf denen  $g(z)$  nach  $\infty$  strebt. Also hat  $g(z)$  sogar unendliche viele Zielwerte im erweiterten Sinne.

Einen ähnlichen Satz können wir beweisen, wenn wir nicht die Zielwerte, sondern die Winkelräume berücksichtigen, in denen eine ganze Funktion mindestens zwei Werte höchstens endlich oft annimmt. Die maximale Größe solcher Winkelräume steht im Zusammenhang mit der Ordnung der Funktion. BIEBERBACH [25] hat bewiesen:

**B.1.** Wenn die ganze Funktion  $f(z)$  in einem Winkelraum  $W$  der Öffnung  $\alpha\pi$  zwei verschiedene Werte höchstens endlich oft annimmt, so gilt in jedem Teilwinkelraum von  $W$

$$f(z) = O(\exp\{K|z|^{1/\alpha}\})$$

für geeignetes  $K > 0$ .

**B.2.** Jede ganze Funktion der Ordnung  $\rho$  nimmt für  $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$  in jedem Winkelraum, dessen Öffnung  $\pi/\rho$  übersteigt, für  $\rho \geq 1$  in jedem Winkelraum, dessen Öffnung  $\pi(2 - \frac{1}{\rho})$  übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Unter Verwendung dieser Ergebnisse folgt der

**Satz 14.** Es sei  $f(z)$  eine ganze Funktion für die

$$(42) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M\{f(z), r\}}{\log r} = A \geq \frac{1}{2}$$

erfüllt ist; dann nimmt die zweite Iterierte  $f\{f(z)\}$  in jedem Winkelraum, dessen Öffnung für  $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$  den Wert  $\frac{\pi}{A}$  und für  $A \geq 1$  den Wert  $\pi(2 - \frac{1}{A})$  übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

*Beweis.* Durch die Forderung (42) werden Polynome ausgeschlossen;  $f(z)$  ist transzendent.  $W$  sei ein Winkelraum, in dem  $f\{f(z)\}$  die beiden Werte  $\alpha$  und  $\beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) höchstens endlich oft annimmt. Es seien  $\xi_i$  die (in der ganzen Ebene, ohne Beschränkung auf  $W$ , gelegenen) Wurzeln von  $f(z) = \alpha$  oder von  $f(z) = \beta$ . Es gibt abzählbar unendlich viele  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Es seien  $z_{ij}$  die in  $W$  gelegenen Wurzeln von  $f(z) = \xi_i$ . Dann hat  $f\{f(z_{ij})\} = f(\xi_i)$  entweder den Wert  $\alpha$  oder  $\beta$ ; also gibt es überhaupt nur endliche viele  $z_{ij}$ . Man kann zwei — und sogar unendliche viele —  $\xi_i$  finden, so daß  $f(z) = \xi_i$  keine Wurzeln in  $W$  hat.

Nehmen wir an, daß die Öffnung  $\Theta$  von  $W$  folgende Ungleichung erfüllt:

$$(43) \quad \begin{cases} \Theta > \frac{\pi}{A} & \text{für } \frac{1}{2} \leq A \leq 1 \\ \Theta > \pi(2 - \frac{1}{A}) & \text{für } A \geq 1. \end{cases}$$

Dann folgt aus B.1, daß  $f(z)$  in jedem Teilwinkelraum  $V$  von  $W$  eine Ordnung  $\rho$  kleiner als  $A$  hat. Wir wählen  $V$  so, daß die Öffnung  $\Phi$  von  $V$  ebenfalls (43) erfüllt. Es ist unmöglich, daß  $f(z)$  eine untere Ordnung  $\rho$  mit  $\rho = 0$  hat:

(i)  $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$ . In  $V$  ist die Ordnung von  $f(z)$  nicht größer als

$$\frac{\pi}{\Theta} < A - 2\delta < A, \quad 0 < \delta < \frac{A}{2}.$$

Nehmen wir an,  $V$  sei der Winkelraum:

$$0 < |z| < \infty, \quad \pi - \frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi + \frac{\Phi}{2}.$$

Auf dem Rand von  $V$  ist für die Funktion

$$F(z) = f(z) \exp(-z^{A-\delta})$$

die Ungleichung

$$|F(r e^{i(\pi \pm \Phi/2)})| < \exp \left\{ r^{A-2\delta} - r^{A-\delta} \cos \left[ (A-\delta) \left( \pi - \frac{\Phi}{2} \right) \right] \right\}$$

für alle genügend großen  $r$ . Dies ist aber beschränkt, weil  $0 < (A-\delta) \left( \pi - \frac{\Phi}{2} \right) < \frac{\pi}{2}$ . Also ist  $F(z)$  auf dem Rand von  $V$  beschränkt.

Ist  $\varrho = 0$ , so gibt es  $r_i \rightarrow \infty$ , so daß

$$|f(r_i e^{i\alpha})| < \exp(r_i^\varepsilon), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

für  $0 < \varepsilon < A - \delta$ . Auf

$$|z| = r_i, \quad -\pi + \frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi - \frac{\Phi}{2}$$

ist

$$|F(z)| < \exp \left\{ r_i^\varepsilon - r_i^{A-\delta} \cos \left[ (A-\delta) \left( \pi - \frac{\Phi}{2} \right) \right] \right\} < K,$$

daher gleichmäßig beschränkt in  $i$ . Anwendung des Maximumsprinzips zeigt, daß  $F(z)$  im ganzen Winkelraum

$$-\pi + \frac{\Phi}{2} \leq \arg z \leq \pi - \frac{\Phi}{2}$$

beschränkt ist:

$$|F(z)| < K'$$

und damit

$$|f(z)| < K' |\exp(z^{A-\delta})| < K' \exp(|z|^{A-\delta})$$

im zu  $V$  komplementären Winkelraum.

Die Ordnung von  $f(z)$  ist also in der ganzen Ebene kleiner als  $A$ , was mit (42) nicht verträglich ist. Folglich ist  $\varrho > 0$ .

(ii)  $A > 1$ . Der Beweis läuft ganz analog zum Fall (i). Weil  $\varrho > 0$  ist, kommt in Satz 12 und Zusatz nur der Fall (i) vor und  $f(z)$  hat die Ordnung  $A$ . Nach B.2 ist diese Behauptung mit der Ungleichung (43) nicht verträglich. Der Satz 14 ist bewiesen.

Ein anderer Satz dieser Art folgt aus weiteren Untersuchungen von BIEBERBACH [24]:

**B.3.** Wenn die ganze Funktion  $f(z)$  einen Winkelraum der Öffnung  $\alpha\pi$  schlicht abbilden soll, so muß in jedem inneren Teilraum

$$f(z) = O(|z|^{2/\alpha})$$

sein.

**B.4.** Eine ganze transzendente Funktion der Ordnung  $\varrho$  ist in keinem Winkelraum, dessen Öffnung  $\pi \left( 2 - \frac{1}{\varrho} \right)$  übersteigt, schlicht (falls  $\varrho \leq \frac{1}{2}$  also in überhaupt keinem Winkelraum).

Wir beweisen den

**Satz 15.**  $f(z)$  sei eine ganze Funktion, so daß

$$(44) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M\{f, r\}}{\log r} = A > 0$$

erfüllt ist; dann ist die zweite Iterierte  $f\{f(z)\}$  in keinem Winkelraum schlicht, dessen Öffnung den Wert  $\pi\left(2 - \frac{1}{A}\right)$  übersteigt.

*Beweis.* Wegen (44) kommen Polynome nicht in Frage.  $W$  sei ein Winkelraum, in dem  $f\{f(z)\}$  schlicht ist.  $f(z)$  ist in  $W$  schlicht. Denn sonst würde es  $\alpha, \beta \in W$ ,  $\alpha \neq \beta$  geben, für die  $f(\alpha) = f(\beta)$ ; dann würde die Gleichung  $f\{f(\alpha)\} = f\{f(\beta)\}$  folgen, entgegen der Schlichtheit von  $f\{f(z)\}$ . Nehmen wir an, daß die Öffnung  $\Theta$  von  $W$  den Wert  $\pi\left(2 - \frac{1}{A}\right)$  übersteigt. Aus B.3 folgt, daß  $f(z)$  in  $W$  durch eine  $|z|$ -Potenz beschränkt ist, und wie in Satz 14 erkennt man, daß die untere Ordnung von  $f(z)$  größer als 0 ist. Aus Satz 12 folgt, daß  $f(z)$  die Ordnung  $A$  hat. Das ist aber (nach B.4) ein Widerspruch zur Annahme  $\Theta > \pi\left(2 - \frac{1}{A}\right)$  und Satz 15 ist bewiesen.

*Bemerkung.* Die Sätze 13, 14 und 15 lassen sich auch als Sätze über die Lösbarkeit der Funktionalgleichung  $f\{f(z)\} = F(z)$  [ $F(z)$  ganz, vorgegeben] aussprechen.

### § 11. Die lokalen Lösungen der Funktionalgleichung $f\{f(z)\} = F(z)$ für ganzes $F(z)$

Wir haben gesehen, daß, falls  $F(z)$  nicht gewisse notwendige Bedingungen erfüllt, die Gleichung

$$(45) \quad f\{f(z)\} = F(z), \quad F(z) \text{ ganz,}$$

keine ganze Lösung  $f(z)$  hat. Dann können trotzdem verschiedene nicht ganze Lösungen vorkommen: z.B. wenn

$$(46) \quad F(z) = \xi + b_1(z - \xi) + b_2(z - \xi)^2 + \dots$$

mit  $b_1 \neq 0$  und  $b_1$  keine Einheitswurzel ist, gibt es genau zwei formale Reihen

$$(47) \quad f(z) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} (z - \xi)^n, \quad i = 1, 2,$$

die bei formalem Einsetzen die Gl. (45) befriedigen. Es kann sogar gezeigt werden, daß diese Reihen einen positiven Konvergenzradius haben (im allgemeinen aber kleiner als  $\infty$ ), falls  $|b_1| \neq 0, 1$ . Der Fall, wo  $F(z)$  einen Fixpunkt  $\xi$  hat, aber  $b_1 = F'(\xi)$  eine Einheitswurzel ist, ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Ein spezielles Beispiel wird am Ende dieses Paragraphen auftreten.

In [8, Theorem 3] haben wir den Satz aufgestellt:

*$f(z)$  sei eine analytische (lokale) Lösung von (45), analytisch in einem Punkt  $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$  und im Fatouschen Ausnahmewert, wenn ein solcher existiert;  $F(z)$  habe einen Beschränktheitsweg. Dann ist  $f(z)$  keine eindeutige Funktion. Weil der Begriff „eindeutige analytische Lösung von (45)“ in [8] nicht richtig definiert wurde, bringen wir hier den genauer formulierten Satz 16 ähnlichen Inhalts.*

*Definition. Eine eindeutige analytische Lösung von  $f(z)$  von (45) ist eine in ihrem schlichten Existenzgebiet  $D$  eindeutige Funktion, die auch eine lokale Lösung von (45) im folgenden Sinne ist: Es gibt ein  $z_0 \in D$  und einen in  $D$  gelegenen Kreis  $K$ :*

$$|z - z_0| < \delta, \quad \delta > 0,$$

so daß  $f(z) \in D$  und (45) für jedes  $z \in K$  gelten.

**Satz 16.**  *$F(z)$  sei eine solche ganze Funktion, daß (45) keine ganze Lösung hat; dann hat (45) keine eindeutige analytische Lösung, die in einem Punkt von  $\mathfrak{F}(F)$  und im Fatouschen Ausnahmewert (falls dieser existiert) regulär ist.*

*Beweis.* Wir nehmen an, daß es unter den Bedingungen des Satzes doch eine eindeutige analytische Lösung  $f(z)$  gibt. Dann zeigen wir

(i)  $f(D) \subset D$ .  $z_0$  habe die gleiche Bedeutung wie in der obigen Definition; also ist  $f(z_0) \in D$ . Es sei  $z_1$  ein solcher Punkt, daß  $f(z_1) \in D$ . Wir verbinden  $z_0$  mit  $z_1$  mittels einer stetigen doppeltpunktfreien Kurve  $\Gamma \subset D$ , und es sei  $p$  der erste Punkt von  $\Gamma$  (das so orientiert ist, daß  $z_0$  vor  $z_1$  liegt), für den  $f(p) \notin D$ . Offenbar ist  $p \neq z_0$ .  $\gamma$  sei der zwischen  $z_0$  und  $p$  liegende Teil von  $\Gamma$ ; also ist  $f(\gamma)$  eine Kurve, die mit Ausnahme des Endpunktes  $f(p)$  ganz in  $D$  liegt. Für  $z \in \gamma$ ,  $z \neq p$  haben wir dann gleichzeitig  $f(z) \in D$  und (45). Mittels (45) können wir  $f(z)$  über den Punkt  $f(p)$  hinaus analytisch fortsetzen: Die Entwicklung

$$f(z) = f(p) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - p)^n \quad \text{mit } a_k \neq 0$$

konvergiert und daher auch die inverse Reihe

$$(48) \quad z = f_{-1}(w) = p + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{w - f(p)\}^{n/k},$$

für die  $f\{f_{-1}(w)\} = w$  ist. Wir bilden den Ausdruck

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\},$$

der um  $w = f(p)$  eine konvergente Entwicklung hat:

$$(49) \quad f^*(w) = F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \{w - f(p)\}^{n/k}.$$

Ein Zweig von (48) bildet aber  $f(\gamma)$  — wenigstens in einer Umgebung des Punktes  $f(p)$ , wo (48) und (49) konvergieren — auf einen Teil von  $\gamma$  ab. Für

diese Punkte  $f(\gamma)$  hat man

$$f^*(w) = F\{f_{-1}(w)\} = f[f\{f_{-1}(w)\}],$$

weil (45) auf  $\gamma$  gilt; also  $f^*(w) = f(w)$  auf einem Segment von  $f(\gamma)$ . Damit ist (49) ein Element des analytischen Gebildes von  $f(z)$ , und weil  $f(z)$  nach Voraussetzung eindeutig ist, ist  $k=1$ . Also ist nach (49)  $f(p) \in D$ , entgegen  $f(p) \notin D$ , und daher ist (i) bewiesen.

(ii) Weil  $f(D) \subset D$  gilt, ist  $f\{f(z)\} = F(z)$  für jedes  $z \in D$ . Dann ist  $F(D) = f\{f(D)\} \subset D$  und sogar  $F_m(D) \subset D$  für jede natürliche Zahl  $m$ . Es wurde angenommen, daß das (offene) Gebiet  $D$  einen Punkt von  $\mathfrak{F}(f)$  und damit einen Kreis  $C$  um diesen Punkt als Zentrum enthält. Nach den oben zitierten Resultaten von FATOU (§ 5, F. III) enthält also  $D \supset F_m(D) \supset F_m(C)$  für genügend großes  $m$  ein beliebiges beschränktes Gebiet, eventuell mit einer Ausnahme einer kleinen Umgebung des Ausnahmewertes. Auch im Ausnahmewert ist  $f(z)$  regulär, also regulär in jedem beschränkten Gebiet; d. h.  $f(z)$  ist ganz, im Widerspruch zur Voraussetzung, und der Satz ist bewiesen.

Besonders interessant unter den lokalen Lösungen sind diejenigen, die man aus dem Fixpunktansatz (46), (47) erhält. Im allgemeinen kann man dort die Koeffizienten  $a_n$  rekursiv bestimmen. Wenn man etwas über die Eigenschaften von  $F(z)$  weiß, ist es ein interessantes Problem, aus diesen Kenntnissen eine Abschätzung für den Konvergenzradius der Entwicklung (47) zu gewinnen. Hierbei sind allgemeine funktionentheoretische Methoden sehr erwünscht, weil die Koeffizientenrekursion für die  $a_n$  unübersichtlich ist. Wir behandeln ein ziemlich spezielles Problem, das THRON, CHOWLA, KEMPNER und RIVLIN (vgl. [9]) aufgeworfen haben.

$$(50) \quad f\{f(z)\} = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

hat genau eine formale Reihenlösung der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

nämlich

$$(51) \quad f(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{48} + \dots$$

wie man durch eine leichte Rechnung bestätigt. Die Berechnung der Koeffizienten  $a_n$  ist aber recht kompliziert und ihre Größe ist von vornherein gar nicht klar. Was ist der Konvergenzradius  $\rho$  von (51)? THRON [9] erwähnt seine Vermutung  $\rho = 0$  und beweist, daß es keine ganze Lösung von (50) gibt.

Soviel folgt sofort aus unserem Satz 8 oder Satz 11. Wir schließen unsere Arbeit mit dem folgenden Ergebnis ab:

**Satz 17.** Es sei  $F(z) = e^z - 1$ ; für jedes reelle  $\sigma$  sei  $F_\sigma(z)$  die durch

$$(52) \quad F\{F_\sigma(z)\} = F_\sigma\{F(z)\}$$



eindeutig bestimmte formale Reihe der Form

$$(53) \quad F_\sigma(z) = z + \frac{\sigma}{2} z^2 + \sum_{m=3}^{\infty} a_m(\sigma) z^m.$$

$F_\sigma(z)$  hat einen positiven Konvergenzradius genau dann, wenn  $\sigma$  eine ganze Zahl ist. Für ganzes  $\sigma = n > 0$  ist  $F_\sigma(z)$  die  $n$ -te Iterierte von  $F(z)$ , also eine ganze Funktion; für ganzes  $\sigma = n < 0$  ergibt  $F_\sigma(z)$  die inverse Reihenentwicklung zu  $F_{-n}(z)$ .

THRONs Vermutung bildet den Fall  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

Wir schicken voraus den einfachen

**Hilfssatz 5.**  $z_0$  sei eine feste Zahl für die  $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$  und  $z_0 \neq 0$  gelten; dann liegt der Hauptwert  $\log(1+z_0)$  im Halbkreis  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $|z| < |z_0|$ .

*Beweis.*

$$|\log(1+z_0)| = \left| \int_0^{z_0} \frac{dt}{1+t} \right| < \int_0^{z_0} d|t| = |z_0|,$$

wenn man längs der Strecke  $\arg t = \arg z_0$  integriert. Andererseits gilt

$$\operatorname{Re} \log(1+z_0) = \log|1+z_0| > 0.$$

*Beweis von Satz 17.* Die Eindeutigkeit und Existenz von  $F_\sigma(z)$  ergibt sich leicht durch formale Rechnung; es zeigt sich, daß die  $a_m(\sigma)$  in (53) reell sind. Die Behauptung über ganzzahlige  $\sigma$ -Werte folgt sofort aus der Eindeutigkeit von  $F_\sigma(z)$ , wenn man die Iterierten von  $F(z)$  im Nullpunkt entwickelt. Es bleibt der Fall von nicht-ganzen  $\sigma$  zu betrachten.

Konvergiert  $F_\sigma(z)$  in  $|z| < \varrho$ ,  $\varrho > 0$ , so konvergiert die inverse Reihe  $G_\sigma(z)$  zu  $F_\sigma(z)$  in  $|z| < \varrho'$ ,  $\varrho' > 0$ .  $F_\sigma(z)$  erfüllt (52) nicht nur als formale Potenzreihe für eine Umgebung von  $z=0$ ; hieraus folgt

$$F\{G_\sigma(z)\} = G_\sigma\{F(z)\}.$$

$G_\sigma(z)$  hat die Entwicklung

$$G_\sigma(z) = z - \frac{\sigma}{2} z^2 + O(z^3).$$

Daher ist  $G_\sigma(z) = F_{-\sigma}(z)$  und  $F_{-\sigma}(z)$  konvergiert in  $|z| < \varrho'$ . Es genügt also die Behauptung des Satzes für  $\sigma > 0$ ,  $\sigma$  nicht ganz, zu beweisen. Zuerst ist klar, daß  $F_\sigma(z)$  keine ganze Funktion ist, denn nach Satz 8 sind  $F_n(z)$ ,  $n > 0$  ganz, die einzigen mit  $F(z)$  vertauschbaren ganzen Funktionen. Der Konvergenzradius von  $F_\sigma(z)$  sei  $\varrho$ . Die Annahme  $\varrho > 0$  führt auf einen Widerspruch:

Es sei  $\varrho > 0$ . (i) Dann hindert keine Singularität die Fortsetzung von (53) in der Halbebene  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ; denn sonst gäbe es ein kleinstes  $r \geq 0$ , zu dem eine singuläre Stelle  $z_0$ :  $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ ,  $|z_0| = r$  existiert. Nach Hilfssatz 5 ist der Hauptwert von  $\log(1+z_0)$  ein regulärer Punkt von  $F_\sigma(z)$ . Die Funktion

$$\Phi(z) = F[F_\sigma\{\log(1+z)\}] = F[F_\sigma\{F_{-1}(z)\}]$$

stimmt in einer Umgebung des Nullpunktes mit  $F_\sigma(z)$  überein und gewährt eine reguläre Fortsetzung von  $F_\sigma(z)$  über  $z_0$  hinaus. Dabei verstehen wir (wie im ganzen Verlauf des Beweises) unter  $\log(1+z)$  den in der aufgeschlitzten

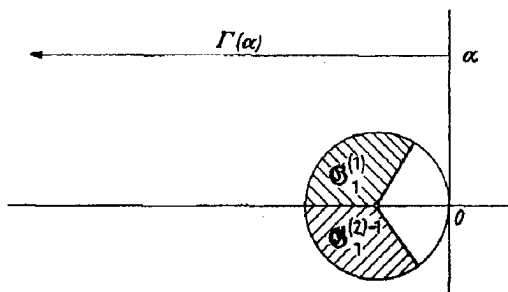


Fig. 1

Ebene  $z \neq r e^{i\pi}$ ,  $r \geq 1$ , regulären Zweig, der im Nullpunkt verschwindet.

(ii)  $z \rightarrow F(z)$  bildet  $\operatorname{Re} z \geq 0$  auf das Äußere und den Rand des Kreises  $|z+1| \geq 1$  ab. Schneiden wir die Ebene von  $-\infty$  bis  $-2$  längs der reellen Achse auf. Dann können wir wieder  $F_\sigma(z)$  mittels  $\Phi(z)$  in das aufgeschlitzte Gebiet  $|z+1| \geq 1$ ;  $z \neq r e^{i\pi}$ ,  $2 \leq r < \infty$ , eindeutig fortsetzen.

(iii) Wir nehmen zu  $\alpha$ ,  $-\pi < \alpha \leq -1$  oder  $1 \leq \alpha < \pi$  einen Weg  $\Gamma(\alpha)$

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\alpha): 0 + i\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \alpha \\ \sigma + i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array} \right\} \quad \text{für } 1 \leq \alpha < \pi,$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\alpha): 0 + i\tau, \quad 0 \geq \tau \geq \alpha \\ \sigma + i\alpha, \quad 0 \geq \sigma > -\infty \end{array} \right\} \quad \text{für } -\pi < \alpha \leq -1.$$

$z \rightarrow F(z)$  bildet  $\Gamma(\alpha)$  auf einen Weg ab, der vom Nullpunkt bis zum Winkel  $\alpha$  auf dem Kreisrand  $|z+1|=1$  und dann radial gegen  $-1$  läuft. Auf diese Weise wird  $F_\sigma(z)$  durch  $\Phi(z)$  in die Gebiete

$$\text{und} \quad \mathfrak{G}_1^{(1)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \pi,$$

$$\mathfrak{G}_1^{(2)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\pi < \theta \leq -1,$$

fortgesetzt.

Man nimmt nun weitere Wege  $\Gamma(\alpha)$ : (52) bzw. (53) mit  $\sin 1 \leq \alpha < 1$  bzw.  $-1 < \alpha \leq \sin(-1)$  und erhält eine entsprechende Fortsetzung von  $F_\sigma(z)$  in die Gebiete

$$\text{und} \quad \mathfrak{G}_2^{(1)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin 1 \leq \theta < 1,$$

$$\mathfrak{G}_2^{(2)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -1 < \theta \leq -\sin 1.$$

Nach  $n$  solchen Schritten kommt man zu zwei Gebieten  $\mathfrak{G}_n^{(1)}$ ,  $\mathfrak{G}_n^{(2)}$  der Form:

$$\mathfrak{G}_n^{(1)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad \sin_{(n-1)}(1) \leq \theta < \sin_{(n-2)}(1),$$

$$\mathfrak{G}_n^{(2)}: -1 + r e^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1, \quad -\sin_{(n-2)}(1) < \theta \leq -\sin_{(n-1)}(1),$$

wobei  $\sin_{(n)} z$  die  $n$ -te Iterierte von  $\sin z$  ist. Für  $n \rightarrow \infty$  ist nun  $\sin_n 1$  eine monoton abnehmende Folge von positiven Zahlen und hat einen Limes  $\gamma$ , für den  $\sin \gamma = \gamma$ . Also strebt  $\sin_n 1 \rightarrow 0$ .

Wir sehen, daß wir  $F_\sigma(z)$  überall in die Ebene fortsetzen können, wenn wir die reelle Achse von  $-\infty$  bis  $0$  wegnehmen. Auf dem Konvergenzkreis  $|z| = \rho$  liegt mindestens eine singuläre Stelle von  $F_\sigma(z)$ , also ist diese eindeutig, und zwar der Punkt  $-\rho$ . Daraus leiten wir jetzt einen Widerspruch her. Für  $-\rho < x$  ist  $F_\sigma(x)$  reell, weil alle  $a_n$  reell sind, und für  $-\rho < x < 0$  ist

$F_\sigma(x) > x$ . Denn es ist  $F_\sigma(0) = 0$ , und für kleine negative  $x$  ist  $F_\sigma(x) > x$ ; wenn  $F_\sigma(x_0) \leq x_0$ ,  $-\rho < x_0 < 0$ , so wäre  $F_\sigma(x_1) = x_1$  für ein  $x_0 \leq x_1 < 0$ , und wenn  $x_1$  der größte solche Wert ist [also  $F_\sigma(x) > x$  für  $x_1 \leq x \leq 0$ ], so ist  $F_\sigma(F(x_1)) = F(F_\sigma(x_1)) = F(x_1)$ . Aber es gilt  $x_1 < F(x_1) < 0$ , entgegen der Definition von  $x_1$ . Also gilt  $F_\sigma(x) > x$  für  $x > -\rho$ . Nun gilt  $F(-\rho) > -\rho$ , so daß sich  $F_\sigma\{F(x)\}$  regulär in  $-\rho$  verhält und außerdem ist  $F_\sigma(F(-\rho)) > F(-\rho) > -1$ . Also gibt  $\Psi(x) = F_{-1}[F_\sigma\{F(x)\}]$  eine reguläre Fortsetzung von  $F_\sigma(x)$  längs der negativen reellen Achse von 0 bis  $-\rho$  und liefert eine reguläre Entwicklung im Punkt  $-\rho$ . Dann wäre aber jeder Punkt des Konvergenzkreises eine reguläre Stelle. Die Annahme  $\rho > 0$  ist also falsch.

### Literatur

- [1] SCHRÖDER, E.: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann.* **2**, 317–365 (1870). — [2] SCHRÖDER, E.: Über iterierte Funktionen. *Math. Ann.* **3**, 296–322 (1871). — [3] KOENIGS, G.: Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Annales sci. de l'École Normale Supérieure* (3), Suppl., (1884), 3–41. — [4] JULIA, G.: Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. Math.* **8**, 1 (1918). — [5] FATOU, P.: Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France* **47**, 164–271 (1919); **48**, 33–94, 208–314 (1920). — [6] FATOU, P.: Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta math.* **47**, 337–370 (1926). — [7] BÖDEWADT, U. T.: Zur Iteration reeller Funktionen. *Math. Z.* **49**, 497–516 (1943–1944). — [8] BAKER, I. N.: The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation  $f\{f(z)\} = F(z)$ . *Math. Ann.* **129**, 174–180 (1955). — [9] THRON, W. J.: Entire solutions of a functional equation. *Canadian J. Math.* **8**, 47–48 (1956). — [10] PÓLYA, G.: On an integral function of an integral function. *J. London Math. Soc.* **1**, 12–15 (1926). — [11] LITTLEWOOD, J. E.: A General Theorem on integral functions of finite order. *Proc. London Math. Soc.* (2) **6**, 189–204 (1908). — [12] WIMAN, A.: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null. *Math. Ann.* **76**, 197–211 (1915). — [13] AMIRÀ, B.: Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières. *Math. Z.* **22**, 206–221 (1925). — [14] BESICOVITCH, A. S.: On integral functions of order  $< 1$ . *Math. Ann.* **97**, 677–695 (1927). — [15] CARTWRIGHT, M. L.: On the minimum modulus of integral functions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **30**, 412–420 (1934). — [16] PENNYCUICK, K.: On a theorem of Besicovitch. *J. London Math. Soc.* **10**, 210–212 (1935). — [17] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions, 2nd edit. Oxford 1939. — [18] RITT, J. F.: On the iteration of rational functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **21**, 348–356 (1920). — [19] RITT, J. F.: Prime und composite polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **23**, 51–66 (1922). — [20] JACOBSTHAL, E.: Über vertauschbare Polynome. *Math. Z.* **63**, 243–276 (1955). — [21] JULIA, G.: Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles. *Annales sci. de l'École Normale Supérieure* (3) **39**, 131–215 (1922). — [22] BOHR, H.: Über einen Satz von Edmund Landau. *Scripta Univ. atque Bibl. Hierosolymitanarum* **1**, Nr. 2 (1923). — [23] PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. 2. Berlin 1925. — [24] BIEBERBACH, L.: Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. *Math. Z.* **2**, 158–170 (1918). — [25] BIEBERBACH, L.: Über eine Vertiefung des Picard'schen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung. *Math. Z.* **3**, 175–190 (1919). — [26] ROSENBLOOM, P.: L'itération des fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris* **227**, 382–383 (1948). — [27] ROSENBLOOM, P.: The fix-points of entire functions. *Medd. Lunds Univ. mat. Sem., Suppl.-Bd. M. Riesz* 186–192 (1952). — [28] VALIRON, G.: Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. August 1957)