

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДВУРАЗМЕРНОЙ ТЕОРИИ РЕШЕТОК

Канд. техн. наук доц. А. М. ГОХМАН,

ст. инж. Е. А. САМСОНОВА.

В настоящее время двумерная теория решеток является основным аппаратом при расчете лопастной системы турбин: или составляющим весь расчет, или являющимся элементом пространственного расчета. Рассчитываемые решетки лежат в криволинейных слоях переменной толщины, ограниченных поверхностями тока, которые принимаются за поверхности вращения вокруг оси турбины (рис. 1).

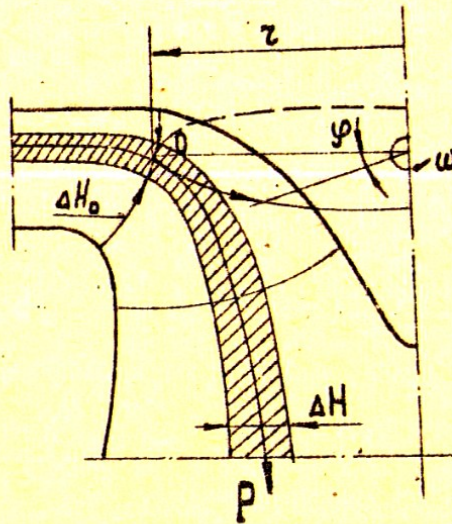


Рис. 1. Слой переменной толщины

Примем одну из поверхностей, образующих слой, за основную и зададим на ней ортогональную криволинейную систему координат с координатными линиями: вдоль меридионального сечения поверхности тока - p , и сечений поверхности тока плоскостями, перпендикулярными оси турбины φ .

Причем

p - расстояние вдоль координатной линии от фиксированной точки с положительным направлением от входа к выходу;

ψ - угол в плане от фиксированной точки меридионального сечения, т.е. в нашем случае коэффициенты Ламэ:

$$N_p = 1; \quad N_\psi = r(\psi).$$

Указанная задача до настоящего времени решалась методом особенностей. Первая попытка к ее решению для толщины слоя, меняющемуся по параболическому закону, была сделана К. Киселевым [Л.1]. Однако его решение было весьма приближенным и содержало ряд принципиальных ошибок [Л.2].

Для слоя с произвольно меняющейся толщиной решение в замкнутом виде было получено Гохманом А.М. и Рао Е.В.Н. [Л.3, Л.4]. Однако численных расчетов по этому методу не проводилось в связи с его большой трудоемкостью.

Далее Моргуновым Г.М. был разработан на основе работ Гохмана, Рао и Цибера Т. [Л.5] численный метод расчета с использованием ЭВМ, который в настоящее время с успехом применяется [Л.6]. В настоящей работе предлагается решение указанной задачи при помощи рядов Тейлора.

Впервые ряды Тейлора к расчету лопастей рабочих колес гидротурбин были применены Дрейфусом [Л.7] и затем Гохманом А.М. [Л.8]. В этих работах задавались скорости на средней поверхности тока и определялись на ней производные скоростей по углу ψ , затем все параметры потока представлялись в виде разложения в ряд по ψ . Однако в [Л.7,8] на среднюю поверхность тока накладывалось ограничение: при бесконечно малых поворотах вокруг оси турбины средняя поверхность тока должна оставаться конгруэнтной сама себе.

Помимо этого в этих работах были принципиальные недостатки. В [Л.7] лопасть получалась бесконечно тонкая, в [Л.8] угол телесности лопасти мог принимать и отрицательные значения и т.д. В обеих работах переход из зоны осесимметричного течения до и после рабочего колеса в зону лопастной системы происходил со скачкообразным разрывом.

Позднее Бу Чун Хуа [Л.9] применил ряды Тейлора к ре-

шению обратной и прямой задач расчета прямой решетки профилей сжимаемой и несжимаемой жидкости в слое постоянной толщины. В [Л.9] скорости задаются на средней линии тока, с которой сняты все ограничения, присущие [Л.7,8], что позволяет спроектировать в обратной задаче лопасть с необходимым заданием толщины, однако в работе Ву Чун Хуа допущена ошибка при определении критической точки на входе и выходе, т.е. в зоне перехода от осесимметричного потока к потоку в зоне лопастей.

Предлагаемый доклад решает вопрос об образовании критической точки на входе и выходе при решении с помощью рядов Тейлора обратной двумерной задачи обтекания решетки телесных профилей, лежащей в криволинейном слое переменной толщины несжимаемой невязкой жидкостью.

I. Поток на средней линии тока в принятых координатах:

В принятых координатах двумерный поток потенциальной жидкости в слое переменной толщины $\Delta H(\rho)$ в каждой точке (ρ, φ) подчиняется уравнениям сплошности и безвихревости:

$$\frac{\partial(h\tau V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hV_\varphi)}{\partial \varphi} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(V_\rho)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(V_\varphi \tau)}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

где V_φ, V_ρ - проекции абсолютной скорости на координатные линии φ, ρ ;

$h = \frac{\Delta H}{\Delta H_0}$, причем ΔH_0 - толщина слоя при $\rho = 0$.

Зададим среднюю линию тока относительного потока в виде уравнения

$$F = \varphi(\rho) \quad (3)$$

Найдем связанную производную по $\rho - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ от произвольной величины φ вдоль этой линии. При изменении ρ на величину $\Delta \rho$ точка переместится вдоль линии [3]. При этом получится приращение

$$\Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \Delta \rho.$$

Таким образом, полное изменение Y :

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \Delta \varphi,$$

или

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial p} \Delta p,$$

т.е.

$$\frac{\bar{\partial} Y}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (4)$$

В свою очередь, так как $F = \varphi(p)$ - линия тока, то

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{W_u}{r V_p} = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{r},$$

где

$$W_u = V_u - \omega r,$$

ω - угловая скорость вращения рабочего колеса.

Окончательно получаем правило для связанного дифференцирования произвольной величины Y вдоль линии тока

$$\frac{\bar{\partial} Y}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{r}. \quad (5)$$

2. Выражение для производных от скоростей по φ .

Преобразуем (1) при помощи правила (5) :

$$\frac{\bar{\partial}(h r V_p)}{\bar{\partial} p} - \frac{\bar{\partial}(V_p r h)}{\bar{\partial} p} + h \frac{\partial V_u}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} h \operatorname{tg} \gamma; \quad (6)$$

аналогично преобразуем (2)

$$\frac{\partial V_p}{\partial \varphi} = \frac{r \bar{\partial} V_u}{\bar{\partial} p} - \frac{\partial V_u}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \gamma. \quad (7)$$

Умножим уравнение (7) на (h) , а уравнение (6) на $(\operatorname{tg} \gamma)$

$$\frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} p} r V_p \operatorname{tg} \gamma + \frac{\bar{\partial} V_p}{\bar{\partial} p} r h \operatorname{tg} \gamma + h \frac{\partial V_u}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} h \operatorname{tg}^2 \gamma; \quad (8)$$

$$\frac{\bar{\partial} V_u}{\partial \rho} \tau h - \frac{\partial V_u}{\partial \varphi} h \operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} h. \quad (9)$$

Сложив уравнения (8) и (9), получим

$$\frac{\partial V_u}{\partial \varphi} = \frac{\tau \left[\left(\frac{\bar{\partial} V_u}{\partial \rho} \operatorname{tg} \gamma - \frac{\bar{\partial} V_p}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{h} \frac{\bar{\partial} h}{\partial \rho} V_p \right]}{(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что $\frac{\partial V_u}{\partial \varphi}$ зависит только от скоростей на средней линии тока и от связанных производных по ρ вдоль этой линии. Аналогичным путем можно получить выражения $\frac{\partial V_u}{\partial \varphi}$. Далее последовательно дифференцируя уравнения (1) и (2) и применяя правило дифференцирования (5), можно получить формулы для производных любого порядка, выраженных через производные низших порядков. Так, например, третья производная

$$\frac{\partial^3 V_u}{\partial \varphi^3} = \frac{\tau \left\{ \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 V_u}{\partial \varphi^2} \right) \operatorname{tg} \gamma - \frac{\bar{\partial}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 V_p}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \frac{1}{h} \frac{\partial^2 V_p}{\partial \varphi^2} \frac{\bar{\partial} h}{\partial \rho} \right\}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)}. \quad (11)$$

Из формул (10), (11) видно, что производные по φ полностью определяются заданием на средней линии тока значений V_p и V_u . Как показал проведенный анализ для обеспечения необходимой точности расчета требуются производные от V_u и V_p третьего порядка.

3. Определение профиля.

Все величины, относящиеся к средней линии тока, будем обозначать индексом (m) . Тогда при заданном значении ρ для любого φ скорость V_p запишется

$$V_p = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial^i V_p}{\partial \varphi^i} \right)_m \varphi^i \frac{1}{i!}, \quad (12)$$

где n - число членов разложения, принятое при расчете.

Используя (12), можно получить при заданных функциях

$$(V_p)_m = [V_p(\rho)]_m \quad \text{и} \quad V_u = [V_u(\rho)]_m$$

распределение скоростей в любой точке канала. Проведя среднюю линию тока через середину при входе в канал, так чтобы она делила расход пополам, запишем условие для получения точек тыльной и рабочей сторон профиля (рис.2).

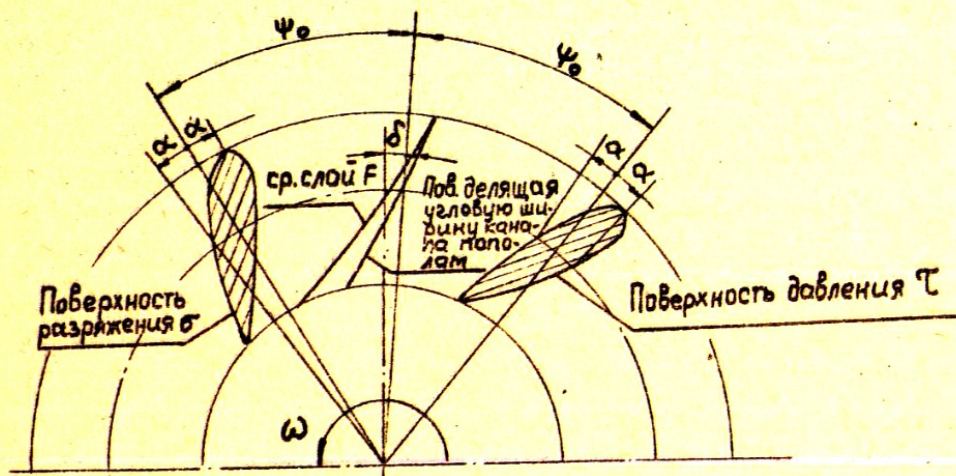


Рис.2. Канал решетки профилей

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial^n W_p}{\partial \psi^n} \right)_m \frac{(-\psi_0 - \delta + \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{Q}{2}; \quad (I3)$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial^n W_p}{\partial \psi^n} \right)_m \frac{(\psi_0 - \alpha + \delta)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{Q}{2}, \quad (I4)$$

где δ - угол между точками линии, делящей угловую ширину канала пополам, и средней линией тока;

2α - угол между точками тыльной и рабочей сторон;

$2\psi_0$ - угловая ширина канала.

Причем

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{k},$$

где K - число лопастей.

Из уравнений (I3), (I4) можно получать величины α и δ , т.е. угловые координаты точек профиля: на рабочей стороне

$$\psi_{\tau} = (+\psi_0 - \delta - \alpha),$$

на тыльной стороне

$$\psi_{\sigma} = (-\psi_0 - \delta + \alpha).$$

Зная при любом ρ углы ψ_{τ} и ψ_{σ} , можно по (I2) найти скорости на профиле и во всем канале при заданном значении ρ . Как показывают расчеты, при достаточном числе лопастей $K > 10$, для определения скоростей в канале достаточно трех производных по ψ (I2).

Рассмотрим возможность представления скоростей в виде (I2) в окрестности критической точки. В своей работе Ву Чун Хуа считает, что для получения критической точки достаточно иметь разложение в ряд до второй производной и накладывает соответствующие условия на скорости и их производные. Покажем, что это сделать невозможно.

Рассмотрим простейшую задачу: обтекание плоским потоком, параллельным оси Z , со скоростью $V_{z \infty}$ системы двух бесконечных рядов, расположенных параллельно оси u источников Q при $Z = Z_1$ и стоков $(-Q)$ при $Z = Z_2$ (рис.3).

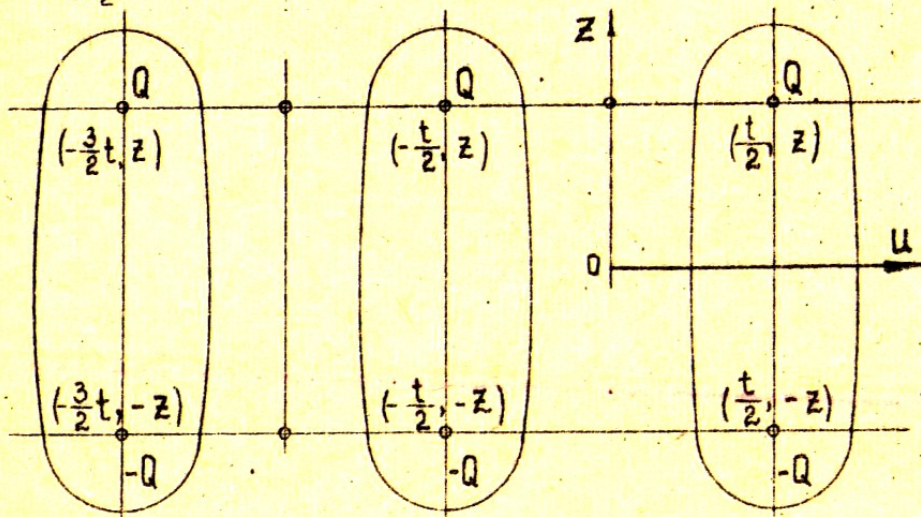


Рис.3. Обтекание системы источников и стоков

Скорость в V_z в этом случае записывается:

$$V_z = V_{z\infty} + \frac{Q}{2t} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{t} (z_0 - z_2)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{t} (z_0 - z_2) - \cos \frac{2\pi}{t} (u_0 - u_2)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{t} (z_0 - z_1)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{t} (z_0 - z_1) - \cos \frac{2\pi}{t} (u_0 - u_1)} \right\}. \quad (15)$$

Методом итераций из (13) нами были определены значения ρ , т.е. координаты критической точки на входе. Далее разложим V_z в ряд в точке $[z, +\rho]$ по φ до 6 производной включительно и, получили значение скорости в критической точке, вместо нуля составляет 0,1126, т.е. 11,26% от $V_{z\infty}$, равного единице. Помимо этого в точке $(z, +\rho) = z$ значение расхода между средней линией и профилем вместо $Q/2 = 0,5$ получилось равным 0,5267, что составляет порядка 5%.

Мы видим, что разложение скоростей в ряд в окрестности критической точки даже с шестью производными не дает требуемой точности в таком простом случае. По всей видимости ряды Тейлора для представления скоростей в окрестности критической точки в общем случае обтекания неприменимы.

Нами предлагается следующий прием решения. На входе при $\rho = \rho_1$ и выходе при $\rho = \rho_2$ решетки задаем соответственно ряды источников и стоков с интенсивностями, необходимыми для получения определенных радиусов закругления входной и выходной кромок.

Форму профиля и распределение скорости при $\rho < \rho_1$ и $\rho > \rho_2$ определяем так. Конформно отображаем поверхность тока при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ на плоскость, на которой производим расчет профиля в зоне критических точек на входе и выходе при помощи известных формул скоростей от ряда особенностей в плоском слое переменной толщины [Л.3].

Далее задаем вдоль средней линии тока $V_p = V_p(\rho)$ и $V_u = V_u(\rho)$ так, чтобы поток от источников и стоков, получаемый при помощи конформного отображения вдоль линии $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, был равен потоку, получаемому в результате разложения скоростей V_u и V_p в ряды Тейлора при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, т.е. накладываем на функции $V_p = V_p(\rho)$ и $V_u = V_u(\rho)$ соответствующие ус-

- 123 -

ловия по производным $\frac{\partial^n V_u}{\partial \rho^n}$ и $\frac{\partial^n V_p}{\partial \rho^n}$.

Таким образом, предлагаемый метод решения обратной задачи двумерной модели решеток сводится к использованию в зоне оголовка (острия) метода особенностей, а во всем остальном межлопастном канале используем ряды Тейлора для определения скоростей (давлений) на профиле, а также требуемых толщин профиля. Проведенный нами поверочный расчет по предлагаемой методике дает удовлетворительный результат уже во втором приближении.

Л и т е р а т у р а

1. Киселев К.А., Профилирование лопастей рабочего колеса радиально-осевой турбины методом особенностей, "Вестник ленинградского университета", № 1, вып. 1, 1958.
2. Гохман А.М., Рао Е.В.Н., О применении поля скоростей от особенностей в слое с толщиной, изменяющейся по параболическому закону, к расчету лопастей радиально-осевой гидротурбины, "Энергомашиностроение", 1964.
3. Гохман А.М., Рао Е.В.Н., Поле скоростей от особенностей в тонком слое переменной толщины, ДАН СССР, № 5, 1965.
4. Рао Е.В.Н., Двумерный гидродинамический расчет решеток лопастных машин общего вида по методу особенностей, Автореферат диссертации, МЭИ, М., 1966.
5. Викторов Г.В., Моргунов Г.М., Решение обратной задачи решеток профилей на осесимметричных поверхностях тока в слое переменной толщины, Изв. АН СССР, № 4, МЭИ, 1968.
6. Czibre T., *Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen*, Indenieur-Archiv 33. n 4, 1964.
7. Dreyfus A.L., *A three dimensional theory of turbine flow and its application of the design of vanes for propeller turbine*, Stockholm, 1946.
8. Гохман А.М., Трехразмерный гидродинамический расчет лопастей рабочего колеса ПЛ-турбины, Труды МЭИ, вып. 12, 1956.

9. Ву Чун Хуа, Теория прямой и обратной задач расчета потока сжимаемой жидкости в решетке, составленной из профилей произвольной формы, "Вопросы ракетной техники", № 1, 13, 1953.