

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР  
МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. М. МОЛОТОВА

---

**ТРУДЫ**  
**МОСКОВСКОГО ордена ЛЕНИНА**  
**ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**  
**имени В. М. МОЛОТОВА**

*Выпуск XII*

**(ГИДРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ)**



**ГОСЭНЕРГОИЗДАТ**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>С. Н. Никитин</b> —Основные вопросы теории водноэнергетического проектирования . . . . .	3
<b>М. П. Фельдман</b> —Обеспеченная энергия, вырабатываемая эксплуатируемыми гидростанциями . . . . .	10
<b>Д. О. Сейфулла</b> —Наивыгоднейшее распределение нагрузки между электрическими станциями и агрегатами . . . . .	31
<b>Л. А. Кароль</b> —К вопросу о гидравлическом аккумулировании энергии . . . . .	44
<b>Е. Н. Чаплыгина</b> —Возможности увеличения пропускной способности турбин в половодье . . . . .	49
<b>В. В. Семенов</b> —Гидроэнергетические основы расчета схемы каскада ГЭС . . . . .	57
<b>С. М. Слиссский</b> —Расчет эжекции на совмещенных гидроэлектростанциях с напорными водосбросами . . . . .	88
<b>И. Г. Максимов</b> —Усовершенствование уравнительного резервуара с добавочным сопротивлением . . . . .	129
<b>Б. Т. Емцев</b> —Об устойчивости откоса каменно-набросной отсыпи в потоке . . . . .	140
<b>А. М. Гохман</b> —Расчет рабочего колеса поворотнлопастной турбины со сферическим втулкой и шахтой . . . . .	153



Механизм  
 можно взять  
 и начать  
 через 2-3 года  
 переоборудов  
 здесь себя  
 у себя  
 в этом  
 Самма  
 М.И. П.

## РАСЧЕТ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ПОВОРОТНОЛОПАСТНОЙ ТУРБИНЫ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВТУЛКОЙ И ШАХТОЙ

А. М. Гохман

### Введение

Осевые поворотнлопастные гидротурбины, как правило, выполняются со сферическими втулкой и шахтой. Это обеспечивает один и тот же минимальный зазор при различных углах поворота лопастей рабочего колеса, т. е. минимальные потери расхода в каплановском режиме. Только на малых гидростанциях сельского типа ставятся поворотнлопастные турбины с цилиндрической втулкой и шахтой.

До настоящего времени не было пространственного расчета поворотнлопастной турбины, учитывавшего сферичность прочной части. В предлагаемой работе изложены основы гидродинамического расчета рабочего колеса поворотнлопастной турбины со сферической втулкой и шахтой, исходя из трехмерной теории среднего слоя, разработанной шведским ученым Дрейфусом [Л.1]. Необходимо отметить, что предлагаемая работа, помимо указанного расчета, дает также и принципы единого подхода к трехмерному гидродинамическому расчету рабочих колес всех видов реактивных турбин.

Все современные гидродинамические расчеты рабочих колес гидротурбин оперируют несжимаемой и невязкой жидкостью. Целью этих расчетов является нахождение по заданным расчетным приведенным значениям расхода и оборотов  $Q_1'$  и  $n_1'$  формы лопастей, дающих минимально возможный коэффициент кавитации  $\sigma$  и максимально возможный к. п. д.  $\eta$  для расчетного режима.

Совершенно ясно, что при существующих в реактивных турбинах давлениях сжимаемостью воды можно пренебречь, так как коэффициент сжатия воды равен 0,00005. Рассмотрение влияния вязкости является более сложным вопросом.

Как известно, из учения о вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса силы вязкости проявляются только на лопастях рабочих колес, образуя тонкий, так называемый по-

граничный слой; во всем остальном пространстве жидкость можно считать невязкой. Это дает право кинематику жидкости в рабочем колесе, полученную в предположении о невязкости жидкости, считать адекватной действительности.

Таким образом, предположение о невязкости не должно искажать значения  $\sigma$ , так как  $\sigma$  является кинематической характеристикой.

Перейдем к  $\eta$ . Потери в турбине в основном сводятся к потерям в рабочем колесе и к потерям во всасывающей трубе.

Рассмотрим турбину с осевым направляющим аппаратом. Этот аппарат дает потенциальный поток перед входом в рабочее колесо. В рабочем колесе, если его лопасти соответствуют условиям входа, уравнению Эйлера и условию потенциальности, имеют место потери энергии на трение в пограничном слое и поток, не потеряв потенциальности (исключим гидродинамический след), попадает во всасывающую трубу. Как известно, всасывающая труба лучше всего работает при потенциальном потоке.

Таким образом, в данном случае мы имеем в рабочем колесе потери только в пограничном слое и минимальные потери во всасывающей трубе. Во всех других случаях, т. е. при неправильно рассчитанной лопасти или при нерасчетных углах поворота лопаток направляющего аппарата и лопастей рабочего колеса, возникают потери энергии на входе. Поток из потенциального перед рабочим колесом переходит в вихревой в рабочем колесе и далее во всасывающей трубе, что увеличивает потери в ней. Потери на трение в пограничном слое значительно меньше потерь на входе в рабочее колесо и потерь во всасывающей трубе. Таким образом, при задании положения оптимума к. п. д. на характеристике можно не учитывать вязкость жидкости.

При гидродинамическом расчете колеса вполне достаточно задать условия входа (входную циркуляцию), пространственный потенциальный поток в проходе между лопастями, отвечающий на выходе уравнению Эйлера:

$$c_{u_2} r_2 = c_{u_1} r_1 - \frac{\eta g H}{\omega}.$$

В этом уравнении мы должны произвольно задавать  $\eta$ , что в значительной степени может изменять кинематику потока и не дать желаемого оптимального расчетного режима. Но эта трудность невелика, так как для различных быстроходностей имеются статистические данные о величине  $\eta$ ; да и сам расчет можно вести в два приближения: испытать первый раз модель и, подставив полученное оптимальное  $\eta$  в уравнение Эйлера, пересчитать это колесо второй раз. Значит, введение ограничений несжимаемости и невязкости жидкости не

должно мешать решению основной задачи при создании нового рабочего колеса.

Интересным подтверждением вышесказанного являются опыты Д. Я. Суханова (5), который изменял почти в тысячу раз кинематический коэффициент вязкости, при этом оптимум к. п. д. насоса почти совсем не смещался.

Перейдем к конкретному рассмотрению существующих методов расчета рабочих колес. Все радиально-осевые турбины рассчитываются по теории Лоренца, т. е. как рабочие колеса, имеющие бесконечное число бесконечно тонких лопастей. Совершенно ясно, что эта теория не отражает действительности.

Критике плоских методов расчета осевых турбин были посвящены основанные на вихревой теории работы И. Н. Вознесенского и Л. А. Симонова [Л. 6 и 7]. Проанализируем эти методы с точки зрения трехмерной теории среднего слоя.

В связи с тем, что в осевой турбине радиальные скоростные  $c_r$  малы, вводится предположение о независимости цилиндрических сечений потока. Цилиндрические сечения разворачиваются на плоскость, и получающееся в результате этого семейство плоских решеток решается методами плоской гидродинамики. В каждом сечении задается поток и решается обратная задача теории решеток, затем получившиеся решетки сворачивают в цилиндрические сечения и произвольным образом набирают из них лопасть турбины, т. е. форма кромок берется произвольно. Совершенно ясно, что расчетный поток, примененный при решении обратной задачи теории решеток, должен удовлетворять четырем условиям:

1. Нормальные скорости  $c_n$  на поверхностях  $F$  спроектированных лопастей и на цилиндрических стенках камеры равняются 0, т. е.

$$c_r = 0 \text{ — на втулке и шахте}$$

и

$$rc_z \frac{\partial F}{\partial z} + rc_r \frac{\partial F}{\partial r} = w_u \text{ на поверхностях лопастей.}$$

2. Поток  $\vec{c}$  удовлетворяет уравнению сплошности  $\operatorname{div} \vec{c} = 0$ .

3. Поток  $\vec{c}$  удовлетворяет уравнению безвихревости  $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$ .

4. Поток  $\vec{c}$  удовлетворяет условию на входе  $(c_{u1}, r_1)$  и уравнению Эйлера.

В плоских теориях задается поле векторов, отвечающее условию на входе  $(c_{u1}, r_1)$ , уравнению Эйлера, условию на границах, т. е.  $c_r = 0$ , но не отвечающее ни уравнению неразрывности, ни уравнению безвихревости. По этому полю векторов различными методами находятся поверхности лопастей с произвольно заданными кромками.

Взаимное влияние формы кромок и распределения скоростей  $c_z$  и тангенциальных скоростей  $w_u$  хорошо видно в случае рабочего колеса с бесконечным числом бесконечно тонких лопастей с цилиндрическими втулкой и шахтой.

В § 5 показано совместное решение уравнения сплошности и безвихревости с основным дифференциальным уравнением потока в рабочем колесе с бесконечным числом бесконечно тонких лопастей с цилиндрическими втулкой и шахтой.

В цилиндрических координатах результат решения сводится к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Psi}{dR} \right] = (\omega r^2 - c_u r) \left[ \frac{\partial(c_u r)}{\partial R} \right]_F \frac{1}{\partial R}.$$

Из этого уравнения, задав  $\Psi = \Psi(r)$ , получим  $c_u r = c_u r[r; \Phi(F)]$ , где  $\Phi(F)$  — произвольная функция от  $F$ . Для разных  $\Psi(r)$  получаем различные  $c_u r[r; \Phi(F)]$ .

Приведем два примера:

1. Зададим  $\Psi = \bar{c}_z r^2 + \Psi_0$ , где  $\bar{c}_z$  и  $\Psi_0$  — const, тогда

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dR} \right] = 0$$

и, следовательно,

$$\left[ \frac{\partial(c_u r)}{\partial R} \right]_F = 0,$$

т. е.  $c_u r$  не зависит от  $r$  и является произвольной функцией от  $F$ .

Таким образом, кромки, являющиеся в случае колеса с бесконечным числом бесконечно тонких лопастей линиями  $c_u r = \text{const}$ , представляют собой меридианальные кривые, т. е. произвольные линии, лежащие в меридианальной плоскости.

2. Зададим  $\Psi = \int \sqrt{2r^2(a \ln r + a_1)} dr$ ; где  $a$  и  $a_1$  — const, тогда

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dR} \right] \cdot \frac{d\Psi}{dR} = ar$$

и решение уравнения выглядит так:

$$r^2 = c_u r + \frac{\omega}{2a} + \Phi(F) \cdot e^{\frac{2a}{\omega} c_u r}.$$

Ясно, что кромки, являющиеся линиями  $c_u r = \text{const}$ , уже не представляют собой меридианы, причем их форма зависит от задания  $\Phi(F)$ , т. е. от  $c_u r = c_u r[r; \Phi(F)]$ .

Таким образом, мы видим, что распределение  $c_z$  и  $c_u r$  тесно связано с формой кромок:

$$c_z = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dR}.$$

Ясно, что этот вывод, как мы раньше уже показали, с качественной стороны справедлив для рабочего колеса с конечным числом толстых лопастей, т. е. в рабочем колесе сечения не являются независимыми друг от друга. В результате любого расчета по плоским теориям вследствие произвольности выбора кромок, как показывает опыт, во время его работы при расчетных углах лопастей и расчетном открытии направляющего аппарата, получается поток, ничего общего не имеющий с расчетным полем скоростей и имеющий отличные от расчетных значения  $Q_1'$ ,  $n_1'$  и  $\sigma$ , причём ошибка доходит до 40% [Л. 2].

Напрашивается вывод о непригодности плоских теорий для создания моделей рабочих колес осевых турбин на заданные режимы. Тем более они непригодны к созданию рабочих колес поворотно-лопастных турбин, так как они не учитывают сферичности камер.

В 1946 г. шведский ученый Л. А. Дрейфус предложил новый метод решения обратной пространственной задачи теории решеток — нахождения поверхности лопастей рабочего колеса по заданному потоку. Этот метод базируется на теории среднего слоя, созданной им же. Но в работе Дрейфуса есть ряд недостатков.

1. Выведены формулы только для первой и в частном случае для второй производных скоростей и не получено общей формулы для  $n$ -ной производной.

2. Не строго и неполно проанализировано влияние вихря на форму кромок.

3. Расчетный поток не отвечает граничным условиям на ободе (шахте) и втулке.

4. Переход от среднего слоя к поверхности лопасти осуществлен без учета всех составляющих скоростей (в случае осевой турбины без учета радиальных скоростей).

В математическом аппарате перехода от среднего слоя к поверхности лопасти была допущена принципиальная ошибка. Функции  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  на данном радиусе определены не зависящими от  $z$ . В то же самое время они представляют собой функции от угла корректировки  $\delta$ , но ведь нельзя же одной переменной управлять двумя функциями. В данной работе  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  зависят от угла корректировки  $\delta$  и от угла телесности лопастей  $\alpha$ .

Таким образом, у Дрейфуса  $\alpha$  тождественно равняется нулю (лопасти бесконечно тонкие), что является и принципиальной ошибкой, как мы видели выше, и практическим недостатком, так как у реальной турбины лопасть телесна. Расчет, основанный на теории среднего слоя, дает возможность создать единый подход к проектированию лопастей рабочих колес реактивных турбин с любым меридиальным сечением, т. е. устранить разрыв между расчетами радиально-осевых и осевых турбин.

Дрейфусом до конца были решены две задачи: расчет осевой турбины с цилиндрической втулкой и шахтой и расчет радиально-осевой турбины с цилиндрическими лопастями, причем оба расчета грешили вышеперечисленными недостатками.

В предлагаемом расчете рабочего колеса поворотной лопастной турбины со сферическими втулкой и шахтой, отмеченные нами недостатки устранены. Так как книга Дрейфуса не была переведена на русский язык, в первой главе предлагаемой работы изложена в сферических координатах теория среднего слоя. В первой же главе изложены полученные мною результаты по выявлению влияния вихря на форму кромок и распределение скоростей  $c_u$ .

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ГИДРОДИНАМИКА СРЕДНЕГО СЛОЯ

#### 1. Допущения, граничные условия на входе и выходе, обозначения

Изложение работы идет в сферических координатах  $\theta, \rho, \varphi$ .  $\theta$  отсчитывается от оси вращения турбины вниз,  $\varphi$  отсчитывается в сторону вращения турбины. Начало координат расположено в центре обеих концентрических сфер (втулки и шахты). Введем обозначения:

$\omega$  — угловая скорость;

$\gamma$  — удельный вес воды;

$p$  — статическое давление;

$\vec{w}$  — относительная скорость;

$c_\theta, c_\rho, \vec{w}_u$  — составляющие относительной скорости;

$\vec{c}$  — абсолютная скорость;

$c_u = \vec{w}_u + \omega r \sin \theta$  — касательная, составляющая абсолютной скорости;

$\eta$  — к. п. д.

Вода принимается несжимаемой и невязкой, движение установившимся, абсолютный поток безвихревым и лопасть недеформируемой. Течение потока на бесконечности до и после рабочего колеса считается осесимметричным. Осесимметричное движение характеризуется уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} = 0,$$

что при подстановке в условие безвихревости  $\text{rot } \vec{c} = 0$

$$\frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial (c_u \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho c_u)}{\partial \rho} = 0;$$



$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho c_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} = 0$$

дает:

$$c_{u^r} = \text{const.} \quad (1-1)$$

Как известно, уравнение Эйлера дает зависимость между средними циркуляциями на входе и выходе:

$$\omega [(\overline{c_{u^r}})_{вх} - (\overline{c_{u^r}})_{вых}] = \eta gH. \quad (1-2)$$

Наша задача состоит в задании такого расчетного потока в колесе, который на входе и выходе рабочего колеса имеет:

$$(\overline{c_{u^r}})_{вх} = (c_{u^r})_{вх \infty} \quad \text{и} \quad (\overline{c_{u^r}})_{вых} = (c_{u^r})_{вых \infty}.$$

Полученная по такому расчетному потоку лопасть обеспечивает безударное протекание потока с соответствующими  $(c_{u^r})_{вх \infty}$  и  $(c_{u^r})_{вых \infty}$ . К сожалению,  $\eta$  в уравнении (1-2) приходится задавать.

## 2. Определение среднего слоя потока

Если задать какую-нибудь кривую, соединяющую втулку колеса с ободом, то можно получить поверхность, образованную всеми линиями тока, проходящими через эту кривую.

Зададим эту поверхность уравнением в явном виде:

$$\varphi = F(\rho; \theta) \quad \text{или} \quad U = F(\rho; \theta) - \varphi = 0; \quad (2-1)$$

тогда

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \\ &+ \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (2-2)$$

где  $\vec{e}_\rho$ ;  $\vec{e}_\theta$ ;  $\vec{e}_\varphi$  — соответствующие орты, но

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial \rho}; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = -1.$$

Перепишем в соответствии с этим уравнение (2-2):

$$\text{grad } U = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{\rho \sin \theta} \vec{e}_\varphi. \quad (2-2')$$

Элемент  $\vec{ds}$  линии тока в сферических координатах:

$$\vec{ds} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + \rho \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi. \quad (2-3)$$

Условие касания  $\vec{ds}$  к поверхности  $U$ :

$$(\vec{ds} \cdot \text{grad } U) = 0.$$

Запишем это условие в скалярной форме, учтя, что  $(\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho) = 1$ ,

$$(\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta) = 1, (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) = 1:$$

$$d\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} + d\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - d\varphi = 0. \quad (2-4)$$

Помножим уравнение (2-4) на  $\rho \sin \theta$  и разделим на  $dt$ , учитывая, что

$$\frac{d\rho}{dt} = c_\rho; \quad \frac{\rho d\theta}{dt} = c_\theta; \quad \frac{\rho \sin \theta d\varphi}{dt} = \omega_u, \quad (2-5)$$

получим основное дифференциальное уравнение поверхности тока в сферических координатах:

$$c_\rho \rho \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} + c_\theta \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \omega_u = 0. \quad (2-6)$$

Такое же уравнение имеет поверхность лопасти, которая, очевидно, образует слой потока.

Теперь представим колесо с бесконечным числом бесконечно тонких лопастей, одинаковых по форме и осесимметрично расположенных с угловым шагом  $\Delta\varphi$ .

Пусть на одной из поверхностей в точке  $(\rho; \theta; \varphi)$  составляющие скорости равны:  $c_\theta; c_\rho; \omega_u$ .

Тогда на соседней поверхности в соответствующей точке  $(\rho; \theta; \varphi + \Delta\varphi)$  составляющие скорости

$$c_\rho + \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \Delta\varphi; \quad c_\theta + \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \Delta\varphi; \quad \omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial \varphi} \Delta\varphi;$$

так как  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$  от  $\varphi$  не зависят (поверхности все одинаковые), то

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (2-7)$$

Запишем дифференциальное уравнение поверхности тока в точке  $(\rho; \theta; \varphi + \Delta\varphi)$ .

$$\left( c_\rho + \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right) \rho \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left( c_\theta + \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right) \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \left( \omega_u + \frac{\partial \omega_u}{\partial \varphi} \Delta\varphi \right) = 0. \quad (2-8)$$

Вычтем (2-6) из (2-8) и сократим разность на  $\Delta\varphi$ :

$$K = \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \rho \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_u}{\partial \varphi} = 0. \quad (2-9)$$

Этой формуле соответствует поверхность тока, касательная к потоку, проходящему через колесо с бесконечным числом лопастей.

Если заданы  $Q_1'$ ;  $n_1'$  и на поверхности, отвечающей (2-9), заданы функция тока  $\Psi$  (т. е. задана форма проточной части рабочего колеса) и закон изменения  $c_u r$ , то очень легко из уравнений (2-6), (2-9) и основных законов гидродинамики несжимаемого, невязкого потенциального потока получить уравнение поверхности, отвечающей (2-9), и найти на этой поверхности во всех ее точках

$$\frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi}, \dots, \frac{\partial^n c_\rho}{\partial \varphi^n}; \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi}, \dots, \frac{\partial^n c_\theta}{\partial \varphi^n},$$

$$\frac{\partial w_u}{\partial \varphi}, \dots, \frac{\partial^n w_u}{\partial \varphi^n},$$

Все изложенное выше дает нам возможность решить обратную задачу теории решеток, т. е. найти пространственную решетку, касательную к сконструированному потоку.

Если же конструируемый поток потенциален, то прямая и обратная задачи взаимно однозначны (это и соответствует рассматриваемому нами потоку).

Таким образом, поток конструируют так: задают средний слой [поверхность, соответствующая (2-9)], а затем, зная на нем  $c_\rho$ ,  $c_\theta$ ,  $w_u$  и их частные производные по  $\varphi$ , выражают скорости в любой точке потока рядом Маклорена (разложение по  $\varphi$ ).

Если все элементы, относящиеся к среднему слою, обозначить индексом  $m$ , то скорости в любой точке ( $\rho$ ;  $\theta$ ;  $\varphi = \psi$ ) потока

$$c_\theta(\rho; \theta; \varphi = \psi) = c_\theta(\rho; \theta)_m + \left[ \frac{\partial c_\theta(\rho; \theta)}{\partial \varphi} \right]_m \frac{\psi}{1!} + \dots +$$

$$+ \left[ \frac{\partial^n c_\theta(\rho; \theta)}{\partial \varphi^n} \right]_m \frac{\psi^n}{n!};$$

$$c_\rho(\rho; \theta; \varphi = \psi) = c_\rho(\rho; \theta)_m + \left[ \frac{\partial c_\rho(\rho; \theta)}{\partial \varphi} \right]_m \frac{\psi}{1!} + \dots +$$

$$+ \left[ \frac{\partial^n c_\rho(\rho; \theta)}{\partial \varphi^n} \right]_m \frac{\psi^n}{n!};$$

$$w_u(\rho; \theta; \varphi = \psi) = w_u(\rho; \theta)_m + \left[ \frac{\partial w_u(\rho; \theta)}{\partial \varphi} \right]_m \frac{\psi}{1!} + \dots +$$

$$+ \left[ \frac{\partial^n w_u(\rho; \theta)}{\partial \varphi^n} \right]_m \frac{\psi^n}{n!}.$$

Отсчет  $\varphi$  ведется от среднего слоя, т. е.  $c(\rho; \theta)_m = c(\rho; \theta; \varphi = 0)$ . Далее, зная распределение скоростей по проходу рабочего колеса и зная угловую ширину прохода —  $\psi_0$  и на входе и выходе угловые толщины лопастей —  $\alpha$ , на основании формулы Гауса-Остроградского находят поверхности всасывания и давления лопастей.

### 3. Решение уравнений Эйлера для движения жидкости вдоль произвольного слоя потока

Выведем формулы для частных производных от  $Y$  по  $\rho$  и  $\theta$ , причем дифференцирование идет вдоль произвольного слоя  $F(\rho; \theta) - \varphi = 0$ ; из (2-4) видно:

$$d\varphi = \frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho, \text{ предполагая } \theta = \text{const}; d\theta = 0; \quad (3-1)$$

$$d\varphi = \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta, \text{ предполагая } \rho = \text{const}; d\rho = 0.$$

Значит, производные вдоль слоя  $\frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  равны:

$$\frac{\partial Y}{\partial \rho} = \frac{1}{d\rho} \left[ \frac{\partial Y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi \right] = \frac{\partial Y}{\partial \rho} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}; \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{1}{d\theta} \left[ \frac{\partial Y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi \right] = \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Любая величина на слое  $F(\rho; \theta) - \varphi = 0$  потока может быть определена двумя координатами  $\rho$  и  $\theta$ . Часто более удобно определять любую точку на слое путем пересечения линии тока  $\Psi(\rho; \theta) = \text{const}$  и меридианальной кривой  $F(\rho; \theta) = \text{const}$ .

Следуя по линии тока  $\Psi = \text{const}$ , которая проходит по слою потока в направлении относительной скорости  $w$ , мы имеем:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\rho \sin \theta \partial F} \right)_{\Psi} = \frac{c_{\rho} dt}{w_u dt} = \frac{c_{\rho}}{w_u}; \quad (3-3)$$

$$\left( \frac{\rho \cdot \partial \theta}{\rho \sin \theta \cdot \partial F} \right)_{\Psi} = \left( \frac{\partial \theta}{\sin \theta \partial F} \right)_{\Psi} = \frac{c_{\theta} dt}{w_u dt} = \frac{c_{\theta}}{w_u}.$$

Изменение любой величины вдоль элемента  $d\vec{S}$  линии тока на слое:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial F} \right)_{\Psi} dF = \frac{\partial Y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial Y}{\partial \theta} d\theta; \quad (3-4)$$

комбинируем (3-3) и (3-4)

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial F} \right)_{\Psi} dF = \frac{\partial Y}{\partial \rho} \frac{c_{\rho} \rho \sin \theta dF}{w_u} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \cdot \frac{c_{\theta} \sin \theta dF}{w_u}.$$

Поделив полученное выражение на  $dF$ , получаем правило дифференцирования вдоль произвольной линии тока  $\Psi = \text{const}$  на слое:

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial F} \right)_{\Psi} = \frac{\rho \cdot \sin \theta}{w_u} \left( c_{\rho} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \rho} + c_{\theta} \cdot \frac{\partial Y}{\rho \partial \theta} \right). \quad (3-5)$$

При  $\omega = \text{const}$  уравнения Эйлера в сферических координатах пишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \left[ c_{\rho} \frac{\partial c_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{c_{\theta}}{\rho} \cdot \frac{\partial c_{\rho}}{\partial \theta} + \frac{w_u}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_{\rho}}{\partial \rho} - \frac{c_{\theta}^2}{\rho} - \frac{c_u^2}{\rho} \right] = \\ = -\gamma \cos \theta - \frac{\partial \rho}{\partial \rho}; \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{g} \left[ \left( c_p \frac{\partial c_\theta}{\partial \rho} + \frac{c_\theta}{\rho} \cdot \frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_u}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right) \rho + c_p \cdot c_\theta - \text{ctg } \theta \cdot c_u^2 \right] = \gamma \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}; \quad (3-6)$$

$$\frac{\gamma}{g} \left[ \left( c_p \cdot \frac{\partial c_u}{\partial \rho} + \frac{c_\theta}{\rho} \cdot \frac{\partial c_u}{\partial \theta} + \frac{w_u}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} \right) \rho \sin \theta + \sin \theta c_p \cdot c_u + \cos \theta \cdot c_\theta \cdot c_u \right] = - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Эти уравнения при помощи (2-6), правил (3-2) и (3-5) можно путем простейших алгебраических преобразований привести к такому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2g} \frac{w_u}{\rho \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\omega^2 - \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta)}{\partial F} \right]_{\Psi} &= \\ &= \frac{w_u}{\rho \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\gamma \rho \cos \theta - p)}{\partial F} \right]_{\Psi}, \end{aligned} \quad (3-7)$$

интегрируя которое получим закон переноса энергии вдоль линии тока, действительный как для вихревого, так и для безвихревого потоков

$$\frac{\gamma}{2g} (\omega^2 - \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta) + p - \gamma \rho \cos \theta = \text{const}. \quad (3-8)$$

Для вихревого потока const различная величина для разных линий тока, для безвихревого потока одна и та же.

#### 4. Уравнение сплошности на среднем слое потока

В сферических координатах оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\rho^2 c_{\rho m})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial w_{um}}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

По правилу (3-2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho^2 c_{\rho m})}{\partial \rho} &= \frac{\partial (\rho^2 c_{\rho m})}{\partial P} - \rho^2 \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} &= \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4-2)$$

подставим (4-2) в (4-1), учтя (2-9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\rho^2 c_{\rho m})}{\partial P} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} &= \\ = \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial w_{um}}{\partial \varphi} &= \\ = \frac{K_m}{\rho \sin \theta} = 0; \end{aligned} \quad (4-3)$$

т. е.

$$\frac{\partial (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial P} + \frac{\partial (\sin \theta \rho c_{\theta m})}{\partial \theta} = 0; \quad (4-4)$$

отсюда

$$c_{\theta m} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \rho}; \quad c_{\rho m} = - \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta}, \quad (4-5)$$

$\Psi_m = \text{const}$  — линия тока на среднем слое потока;

$\Psi_m = \Psi_m(\rho; \theta)$  увеличивается от втулки к ободу.

Элемент потока  $d\Psi_m$  между соседними линиями тока

$$d\Psi_m = \frac{\partial \Psi_m}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} d\theta;$$

$$d\Psi_m = -c_{\rho m} \rho^2 \sin \theta \cdot d\theta + c_{\theta m} \cdot \rho \sin \theta d\rho; \quad (4-6)$$

$$d\Psi_m = -c_{\rho m} \rho^2 \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{d\theta}{\frac{\partial F_m}{\partial \rho}} +$$

$$+ c_{\theta m} \rho \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{d\rho}{\frac{\partial F_m}{\partial \theta}}.$$

Двигаясь по меридиану ( $d\varphi = 0$ ) из (2-4), получаем:

$$\frac{\partial F_m}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} d\theta = 0;$$

$$\frac{d\rho}{\frac{\partial F_m}{\partial \rho}} = - \frac{d\theta}{\frac{\partial F_m}{\partial \theta}}. \quad (4-7)$$

Подставим в (4-6 III) (4-7), учтя (2-6),

$$d\Psi_m = \frac{\rho d\rho}{\frac{\partial F_m}{\partial \theta}} \left[ c_{\rho m} \rho \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} + c_{\theta m} \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right] = \frac{\rho \omega_{um}}{\frac{\partial F_m}{\partial \theta}} d\rho$$

аналогично

$$d\Psi_m = - \frac{\rho \omega_{um}}{\frac{\partial F_m}{\partial \rho}} d\theta. \quad (4-8)$$

Следовательно,

$$\left[ \frac{\partial \Psi_m}{\partial \rho} \right]_{F_m} = \frac{\rho \omega_{um}}{\frac{\partial F_m}{\partial \theta}}; \quad \left[ \frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} \right]_{F_m} = - \frac{\rho \omega_{um}}{\frac{\partial F_m}{\partial \rho}}. \quad (4-9)$$

Выведем формулу для производной от произвольной величины  $Y_m$  по  $\Psi_m$  вдоль меридиана  $F_m$ :

$$\left[ \frac{\partial Y_m}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m} = \frac{\partial Y_m}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \Psi_m} \right)_{F_m} + \frac{\partial Y_m}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \Psi_m} \right)_{F_m}; \quad (4-10)$$

учтя (4-9), получаем:

$$\left[ \frac{\partial Y_m}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m} = \frac{1}{\omega_{um} \rho} \left( \frac{\partial Y_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} - \frac{\partial Y_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right). \quad (4-11)$$

## 5. Уравнения, которым удовлетворяет абсолютный безвихревый поток. Относительный поток и его вихрь

Еще раз запишем условие безвихревости  $\vec{\text{rot}} \vec{c} = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial (c_u \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} = 0; \\ \text{II. } & \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\rho c_u)}{\partial \rho} = 0; \\ \text{III. } & \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (5-1)$$

Рассмотрим условия, накладываемые (5-1) на поток вдоль произвольного слоя  $F(\rho; \theta) - \varphi = 0$ .

Воспользуемся правилом (3-2) и уравнениями (5-1-I) и (5-1-II):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial \rho} &= \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial P} - \rho \cdot \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial P} - \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial \rho} &= \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial P} - \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (5-2)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} &= \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} &= \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (5-3)$$

Подставим (5-2) и (5-3) в (5-1-III)

$$U = \frac{\partial (\rho c_\theta)}{\partial P} - \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\partial (c_u \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (5-4)$$

Однако, рассматривая средний слой и применяя правило (4-11), получаем из (5-4):

$$U_m = \frac{\partial (\rho c_{\theta m})}{\partial P} - \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \theta} = -\omega_{u_m} \rho \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m}. \quad (5-5)$$

Вихрь относительного потока  $U_m$  влияет на форму входной и выходной кромок среднего слоя.

Если  $U_m = 0$ ,

$$\left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m} = 0. \quad (5-6)$$

Выражение (5-6) показывает, что если  $U_m = 0$ ;  $c_u r_m = f(F_m)$ , т. е. кромки, являющиеся кривыми  $c_u r = \text{const}$ , должны быть меридианами  $F_m = \text{const}$ .

Если  $U_m \neq 0$ ;  $(c_u r_m) = f(\Psi_m; F_m)$ , значит,

$$d(c_u r_m) = \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial F_m} \right]_{\Psi_m} dF + \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m} d\Psi. \quad (5-7)$$

Вдоль кромок  $(c_u r_m) = \text{const}$ ;  $d(c_u r_m) = 0$  получаем, учтя (5-5),

$$\left( \frac{dF_m}{d\Psi_m} \right)_{c_u r_m} = - \frac{\left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m}}{\left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial F_m} \right]_{\Psi_m}} = \frac{U_m}{\omega_{um}} \left[ \frac{\partial F_m}{\partial(c_u r_m)} \right]_{\Psi_m} \quad (5-8)$$

В некоторых частных случаях можно, зная  $\Psi_m$ , из (5-5) найти выражение для  $(c_u r_m)$ .

Запишем уравнение (5-5) в цилиндрических координатах:

$$U_m = \frac{\partial c_{zm}}{\partial R} - \frac{\partial c_{rm}}{\partial Z} = -\omega_{um} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m}, \quad (5-9)$$

где

$$c_{zm} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_m}{\partial R}; \quad c_{rm} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_m}{\partial Z}. \quad (5-10)$$

В случае осевой турбины

$$\Psi_m = \Psi_m(r).$$

Следовательно,

$$c_{zm} = \frac{1}{r} \frac{d\Psi_m}{dR} \quad c_{rm} = 0$$

и

$$U_m = \frac{d}{dR} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\Psi_m}{dR} \right] = \frac{1}{r} \frac{d^2 \Psi_m}{dR^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\Psi_m}{dR}. \quad (5-11)$$

В свою очередь

$$\left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \Psi_m} \right]_{F_m} = \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial R} \right]_{F_m} \cdot \frac{1}{\frac{d\Psi_m}{dR}}. \quad (5-12)$$

С учетом уравнений (5-11) и (5-12) перепишем (5-9):

$$\left[ \frac{d^2 \Psi_m}{dR^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Psi_m}{dR} \right] \frac{d\Psi_m}{dR} = -\omega_{um} \cdot \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial R} \right]_{F_m}$$

или

$$\left[ \frac{d^2 \Psi_m}{dR^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Psi_m}{dR} \right] \frac{d\Psi_m}{dR} = (\omega r^2 - c_u r_m) \cdot \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial R} \right]_{F_m}. \quad (5-13)$$

Уравнение (5-13) допускает решение, если его левая часть  $f(r)$  равняется:  $ar$ ,  $ar^3$  или  $-\frac{a}{r}$ .

Найдем функции тока  $\Psi_m$ , соответствующие этим левым частям.

Сделаем подстановку:

$$\left[ \frac{d\Psi_m}{dR} \right]^2 = z;$$

тогда

$$2 \frac{d\Psi_m}{dR} \cdot \frac{d^2 \Psi_m}{dR^2} = z'.$$



Таким образом, для решения вопроса получаем дифференциальное уравнение

$$z' - \frac{2}{r}z = 2 \cdot f(r). \quad (5-14)$$

Решение этого уравнения записывается так:

$$z = 2e^{-\alpha} \int f(r)e^{\alpha} dr,$$

где

$$\alpha = \int -\frac{2}{r} = -2 \ln r.$$

Таким образом, получаем:

$$\left[ \frac{d\Psi_m}{dR} \right]^2 = 2r^2 \int f(r) \cdot \frac{1}{r^2} dr. \quad (5-15)$$

Найдем значения  $\Psi$  для соответствующих  $f(r)$  — левых частей уравнения (5-13):

1.  $f(r) = ar$ ; тогда

$$\left[ \frac{d\Psi_m}{dR} \right]^2 = 2r^2 \int ar \cdot \frac{1}{r^2} dr = 2r^2 (a \ln r + a_1),$$

т. е.

$$\frac{d\Psi_m}{dR} = \sqrt{2 \cdot r \sqrt{a \ln r + a_1}}$$

и

$$\Psi_m = \sqrt{2} \cdot \int r \sqrt{a \ln r + a_1} dr.$$

2.  $f(r) = ar^3$ ; тогда

$$\left[ \frac{d\Psi_m}{dR} \right]^2 = 2r^2 \int ar^3 \frac{1}{r^2} = ar^4 + a_1 r^2,$$

т. е.

$$\frac{d\Psi_m}{dR} = r \sqrt{ar^2 + a_1}$$

и

$$\Psi_m = \int r \sqrt{ar^2 + a_1} dr$$

или

$$\Psi_m = \frac{1}{3a} (ar^2 + a_1)^{\frac{3}{2}} + \Psi_0.$$

В частном случае, когда  $a_1 = 0$ ,

$$\Psi_m - \Psi_0 = \frac{\sqrt{a^3}}{3a} r^3 = \frac{\sqrt{a}}{3} r^3.$$

3.  $f(r) = -\frac{a}{r}$ , где  $a > 0$ ; тогда

$$\left[ \frac{d\Psi_m}{dR} \right]^2 = 2r^2 \int -a \cdot \frac{1}{r^3} dr = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r^2} + a_1 r^2 \right],$$

т. е.

$$\frac{d\Psi_m}{dR} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r^2} + a_1 r^2 \right]}$$

и

$$\Psi_m = \int \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r^2} + a_1 r^2 \right]} dr.$$

В частном случае, когда  $a_1 = 0$ ,

$$\frac{d\Psi_m}{dR} = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1}{r}$$

и

$$\Psi_m = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \ln r + \Psi_0.$$

Решение случаев 1, 2, 3 соответственно сводится к решению уравнений первого порядка

$$(y - kx^2)y' = ax; \quad (5-16)$$

$$(y - kx^2)y' = ax^3; \quad (5-17)$$

$$(y - kx^2)y' = -\frac{a}{x}. \quad (5-18)$$

Решим уравнение (15-16).

Сделаем подстановку:

$$u(y) = kx^2;$$

тогда

$$u'(y) \cdot y' = 2kx.$$

Подставив значения  $x$  и  $u'$  в (5-16), получим:

$$(y - u)y' = \frac{1}{2} \frac{a}{k} u'y';$$

или

$$u' + \frac{2a}{k} u = \frac{2a}{k} y.$$

Отсюда

$$u = kx^2 = y + \frac{k}{2a} + C \cdot e^{\frac{2a}{k}y}; \quad (5-19)$$

Решим уравнение (5-17).

Сделаем подстановку

$$u(x) = \frac{1}{y - kx^2},$$

получим:

$$u' + ax^3u^3 - 2xu^2 = 0; \quad (5-20)$$

Подставим в (5-20)

$$u = \frac{2}{x^2} t(x)$$

и получим:

$$t' = -\frac{8}{x^3}(t^3 + t^2 - t).$$

Проинтегрировав это выражение, можно получить:

$$f(x; y) = \frac{2}{x^4}. \quad (5-21)$$

Но ясно, что выразить  $y$  через  $x$  в этом уравнении невозможно. Решим уравнение (5-18).

Примем за независимую переменную  $y$  и в соответствии с этим перепишем уравнение иначе:

$$-x \frac{y}{a} + \frac{k}{a} x^3 = x'. \quad (5-22)$$

Сделаем в этом уравнении подстановку

$$u(x) = \frac{1}{x^2};$$

тогда

$$u' = -\frac{2x'}{x^3}.$$

Подставив значение  $u'$  в (5-22), получаем:

$$u' - 2 \frac{y}{a} \frac{1}{x^2} + 2 \frac{k}{a} = 0,$$

т. е.

$$u' - 2 \frac{y}{a} u + 2 \frac{k}{a} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$u = e^{-\alpha} \left[ C - \int 2 \frac{k}{a} e^{\alpha} dy \right],$$

где

$$\alpha = \int -2 \frac{y}{a} dy = -\frac{y^2}{a};$$

таким образом,

$$u = \frac{1}{x^2} = e^{\frac{y^2}{a}} \left[ C + \int 2 \frac{k}{a} e^{-\frac{y^2}{a}} dy \right]. \quad (5-23)$$

Теперь окончательно запишем решения для всех трех вариантов.

1. Задаем:

$$\Psi_m = \int \sqrt{2r^2(a \ln r + a_1)} dr,$$

где  $a$  и  $a_1$  — const.

Получаем:

$$\omega r^2 = c_u r_m + \frac{\omega}{2a} + \Phi(F_m) \cdot e^{\frac{2a}{\omega} c_u r_m}. \quad (5-24)$$

2. Задаем

$$\Psi_m = \frac{1}{3a} V \overline{(ar^2 + a_1)^3} + \Psi_0,$$

где  $a$ ,  $a_1$  и  $\Psi_0$  — const.

Получаем неявную функцию  $V[(c_u r_m); r; \Phi(F_m)] = 0$ , причем  $c_u r_m$  невозможно выразить через  $r$  и  $\Phi(F_m)$ .

3. Задаем:

$$\Psi_m = \int \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r^2} + a_1 r^2 \right]} dr,$$

где  $a > 0$  и  $a_1$  — const.

Получаем:

$$\frac{1}{r^2} = e^{\frac{(c_u r_m)^2}{a}} \left[ \Phi(F_m) - \int 2 \frac{\omega}{a} e^{-\frac{(c_u r_m)^2}{a}} d(c_u r_m) \right]. \quad (5-25)$$

Совершенно ясно, что во всех трех случаях кромки не являются меридианами.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

#### 6. Выражение для $n$ -ной производной от $c_{\rho m}$ , $c_{\theta m}$ и $\omega_{um}$ по $\varphi$ .

Из (5-1-I) и (5-1-II) получаем:

$$\rho \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (c_{um} \rho \sin \theta)}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (c_{um} \rho \sin \theta)}{\partial \rho}. \quad (6-1)$$

Вспользуемся правилом (3-2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (c_{\theta m} \rho)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \theta} - \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \rho} - \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (6-2)$$

Продифференцируем (6-2)  $(n-1)$  раз по  $\varphi$  и переменим порядок дифференцирования по  $\theta$ ,  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n (c_{\theta m} \rho)}{\partial \varphi^n} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_u r_m)}{\partial \varphi^{n-1}} \right] - \rho \sin \theta \frac{\partial^n \omega_{um}}{\partial \varphi^n} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial^n c_{\rho m}}{\partial \varphi^n} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_u r_m)}{\partial \varphi^{n-1}} \right] - \rho \sin \theta \frac{\partial^n \omega_{um}}{\partial \varphi^n} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (6-3)$$

Вспомним уравнение сплошности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial \rho} + \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega_{um}}{\partial \varphi} = 0.$$

Используя правило (3-2), его можно переписать:

$$\frac{\partial w_{um}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial \rho} \quad (6-4)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \theta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial \rho} \quad (6-5)$$

Если в (6-5) подставить значения  $c_{\theta m}$  и  $c_{\rho m}$  из (4-5), то получается тождество

$$\frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \rho \partial \theta}$$

Продифференцируем (6-4)  $n-1$  раз и перепишем его с учетом (6-5):

$$\frac{\partial^n w_{um}}{\partial \varphi^n} = \frac{\partial^n (\sin \theta c_{\theta m})}{\partial \varphi^n} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^n (\rho^2 \sin \theta c_{\rho m})}{\partial \varphi^n} \frac{\partial F_m}{\partial \rho},$$

или

$$\frac{\partial^n w_{um}}{\partial \varphi^n} = \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^n c_{\theta m}}{\partial \varphi^n} + \rho \sin \theta \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^n c_{\rho m}}{\partial \varphi^n} \quad (6-6)$$

Теперь решим систему трех уравнений: (6-3-I); (6-3-II) и (6-6) с тремя неизвестными:

$$\frac{\partial^n c_{\rho m}}{\partial \varphi^n}; \quad \frac{\partial^n c_{\theta m}}{\partial \varphi^n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^n w_{um}}{\partial \varphi^n};$$

$$N_m \frac{\partial^n c_{\theta m}}{\partial \varphi^n} = \frac{\left[ 1 + \rho^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 \right]}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right] - \rho \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right]; \quad (6-7)$$

$$N_m \frac{\partial^n c_{\rho m}}{\partial \varphi^n} = \left[ 1 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right] - \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right], \quad (6-8)$$

где

$$N_m = 1 + \rho^2 \sin^2 \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2; \quad (6-9)$$

$$N_m \frac{\partial^n w_{um}}{\partial \varphi^n} = \rho \sin \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right] + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{n-1} (c_{\rho m})}{\partial \varphi^{n-1}} \right]. \quad (6-10)$$

## 7. Формулы для 1-й и 2-й производных от скоростей по $\varphi$ в случае потенциального относительного потока ( $U_m = 0$ )

В § 5 мы уже видели, что когда  $U_m = 0$ ,  $c_u r_m$  — функция только от  $F_m$  и не зависит от  $\Psi_m$ . Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial(c_u r_m)}{\partial\theta} = \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \frac{\partial F_m}{\partial\theta}; \quad \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial\rho} = \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \frac{\partial F_m}{\partial\rho}. \quad (7-1)$$

Подставив в (6-7), (6-8) и (6-10) значение  $n = 1$  и учтя (7-1), получаем очень простые выражения для первых производных:

$$N_m \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \frac{\partial F_m}{\partial\theta}; \quad (7-2)$$

$$N_m \frac{\partial c_{\varphi m}}{\partial\varphi} = \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \frac{\partial F_m}{\partial\rho}; \quad (7-3)$$

$$N_m \frac{\partial \omega_{um}}{\partial\varphi} = \frac{N_m - 1}{\rho \sin\theta} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m}. \quad (7-4)$$

Выведем формулу для  $\frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi}$ :

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi} = \frac{1}{2\omega_m} \frac{\partial(\omega_m^2)}{\partial\varphi} = \frac{1}{\omega_m} \left[ c_{\varphi m} \frac{\partial c_{\varphi m}}{\partial\varphi} + c_{\theta m} \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial\varphi} + \omega_{um} \frac{\partial \omega_{um}}{\partial\varphi} \right]. \quad (7-5)$$

Подставим в (7-5) значения  $\frac{\partial c_{\theta m}}{\partial\varphi}$ ;  $\frac{\partial c_{\varphi m}}{\partial\varphi}$  и  $\frac{\partial \omega_{um}}{\partial\varphi}$  из формул (7-2); (7-3) и (7-4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi} &= \frac{1}{\omega_m} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \cdot \frac{1}{N_m} \left[ c_{\varphi m} \frac{\partial F_m}{\partial\rho} + c_{\theta m} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_m}{\partial\theta} + \omega_{um} \frac{N_m - 1}{\rho \sin\theta} \right]; \\ \frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi} &= \frac{1}{\omega_m} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{1}{N_m} \times \\ &\times \left[ c_{\varphi m} \rho \sin\theta \frac{\partial F_m}{\partial\rho} + c_{\theta m} \sin\theta \frac{\partial F_m}{\partial\theta} + \omega_{um} (N_m - 1) \right]. \end{aligned}$$

Вспомнив, что  $\omega_u = c_{\varphi} \rho \sin\theta \frac{\partial F}{\partial\rho} + c_{\theta} \sin\theta \frac{\partial F}{\partial\theta}$ , получаем выражение для  $\frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi}$ :

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial\varphi} = \frac{\omega_{um}}{\omega_m} \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m}. \quad (7-6)$$

Для вторых производных воспользуемся общими формулами (6-7), (6-8) и (6-10) при  $n = 2$ .

Расшифруем входящие в эти формулы выражения

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial\varphi} \right] \text{ и } \frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial\varphi} \right];$$

из (7-4)

$$\frac{\partial(c_u r_m)}{\partial\varphi} = \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{d(c_u r_m)}{dF}; \quad (7-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m} \right] = \\ &= \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{d^2(c_u r_m)}{dF_m^2} \frac{\partial F_m}{\partial \rho} + \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{N_m - 1}{N_m} \frac{d^2(c_u r_m)}{dF_m^2} \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \frac{d(c_u r_m)}{dF_m}, \end{aligned} \quad (7-8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial \rho} &= 2\rho \sin^2 \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + 2\rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} + \\ &+ 2 \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial N_m}{\partial \rho} = 2 \sin^2 \theta \left[ \rho \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} \right]; \quad (7-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial \theta} &= 2\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + 2\rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \\ &+ 2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \sin^2 \theta \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial \theta} &= 2 \left\{ \sin \theta \cdot \cos \theta \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sin^2 \theta \left[ \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7-10)$$

## 8. Формулы для третьей производной от $c_\theta$ , $c_\rho$ и $\omega_u$ по $\varphi$ в случае ( $U_m = 0$ )

Иногда, когда не хватает двух членов в ряде Маклорена, нужно подсчитать третьи производные скоростей. Для подсчета их нужно знать:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial^2(c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right] \text{ и } \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2(c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right].$$

Из (6-10) видно, что

$$\frac{\partial^2(c_u r_m)}{\partial \varphi^2} = \frac{\sin^2 \theta}{N} \left\{ \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial(c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] \right\}. \quad (8-1)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial^2 (c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right] &= \frac{\sin^2 \theta}{N_m} \left\{ 2\rho \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \right. \\ &+ \rho^2 \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta \partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \left. \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial P \partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] \right\} - \\ &- \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \left\{ N_m \cdot \frac{\partial^2 (c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right\}; \end{aligned} \quad (8-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^2 (c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right] &= \frac{\sin^2 \theta}{N_m} \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta \partial \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \right. \\ &+ \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial P} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \left. \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] \right\} + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right\} - \\ &- \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \left\{ N_m \frac{\partial^2 (c_u r_m)}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (8-3)$$

Раскроем производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial P^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right]; \quad \frac{\partial^2}{\partial P \partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right]; \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right];$$

Из (7-8) можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} + \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \cdot \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \\ &+ \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho^2} N_m - 2 \left( \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \right)^2 \cdot \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} + \\ &+ \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \frac{\partial F_m}{\partial \rho}; \end{aligned} \quad (8-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \times \\ &\times \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho \partial \theta} N_m - 2 \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \times \\ &\times \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} + \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho}; \end{aligned} \quad (8-5)$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{\partial N_m}{N_m^2} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \left( \frac{dF_m}{d\theta} \right)^2 + \\
&+ \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} + \frac{\frac{\partial^2 N_m}{\partial \theta^2} N_m - 2 \left( \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \right)^2}{N_m^3} \cdot \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} + \\
&+ \frac{\partial N_m}{N_m^2} \cdot \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{8-6}$$

Эти выражения можно переписать:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial P^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \cdot \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \\
&+ \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \left[ \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\frac{\partial N_m}{\partial \rho}}{N_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right] + \\
&+ \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} \cdot \frac{\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho^2} N_m - 2 \left( \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \right)^2}{N_m^3};
\end{aligned} \tag{8-4'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial P \partial \theta} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \cdot \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \left[ \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\frac{\partial N_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} + \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta}}{N_m^2} \right] + \\
&+ \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} \cdot \frac{\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho \partial \theta} N_m - 2 \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial \theta}}{N_m^3};
\end{aligned} \tag{8-5'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{\partial (c_u r_m)}{\partial \varphi} \right] &= \frac{d^3 (c_u r_m)}{dF_m^3} \cdot \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2 + \\
&+ \frac{d^2 (c_u r_m)}{dF_m^2} \left[ \frac{N_m - 1}{N_m} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\frac{\partial N_m}{\partial \theta}}{N_m^2} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right] + \\
&+ \frac{d (c_u r_m)}{dF_m} \cdot \frac{\frac{\partial^2 N_m}{\partial \theta^2} N_m - 2 \left( \frac{\partial N_m}{\partial \theta} \right)^2}{N_m^3};
\end{aligned} \tag{8-6'}$$

Остается раскрыть значения  $\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho^2}$ ;  $\frac{\partial^2 N_m}{\partial \theta^2}$  и  $\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho \partial \theta}$ ; учтя (7-9) и (7-10), получаем:

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho^2} = 2 \sin^2 \theta \left\{ \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + 4\rho \cdot \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} + \right. \\ \left. + \rho^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} \right)^2 + \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \rho^3} \right] + \left( \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \rho^2 \partial \theta} \right\}; \quad (8-7)$$

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial \rho \partial \theta} = 2 \cos \theta \left[ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial \rho} \right] + 2 \sin^2 \theta \left[ 2\rho \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \right. \\ \left. + \rho^2 \left( \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho^2} + \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \theta \partial \rho^2} \right) + \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \rho \partial \theta^2} \right]; \quad (8-8)$$

$$\frac{\partial^2 N_m}{\partial \theta^2} = 2 \cos 2\theta \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ + 4 \sin 2\theta \left[ \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \right] + \\ + \sin^2 \theta \left\{ \rho^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta \partial \rho} \right)^2 + \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \rho \partial \theta^2} \right] + \left( \frac{\partial^2 F_m}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{\partial F_m}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^3 F_m}{\partial \theta^3} \right\}. \quad (8-9)$$

Остается найти выражения для  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ ;  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta}$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$  и т. д.

Эти выражения определяются в зависимости от самой  $F = F(\rho; \theta)$ . В следующей главе для полученной нами  $F(\rho; \theta)$  мы найдем эти производные.

Нам еще нужно вывести формулы для  $\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \varphi^2}$  и  $\frac{\partial^3 \omega_m}{\partial \varphi^3}$ .

Продифференцировав  $\omega_m^2$  2 и 3 раза по  $\varphi$ , соответственно получаем:

$$\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\omega_m} \left[ c_{\rho m} \frac{\partial^2 c_{\rho m}}{\partial \varphi^2} + c_{\theta m} \frac{\partial^2 c_{\theta m}}{\partial \varphi^2} + \omega_{um} \frac{\partial^2 \omega_{um}}{\partial \varphi^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_{um}}{\partial \varphi} \right)^2 - \left( \frac{\partial \omega_m}{\partial \varphi} \right)^2 \right]; \quad (8-10)$$

$$\frac{\partial^3 \omega_m}{\partial \varphi^3} = \frac{1}{\omega_m} \left[ c_{\rho m} \frac{\partial^3 c_{\rho m}}{\partial \varphi^3} + c_{\theta m} \frac{\partial^3 c_{\theta m}}{\partial \varphi^3} + \omega_{um} \frac{\partial^3 \omega_{um}}{\partial \varphi^3} + \right. \\ \left. + 3 \left( \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 c_{\rho m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial c_{\theta m}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 c_{\theta m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \omega_{um}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \omega_{um}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \omega_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (8-11)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПРОФИЛЬНОГО ПОТОКА ( $U_m=0$ )

9. Составление уравнения и его решение

В случае колеса со сферическими втулкой и шахтой естественно предположить, что на среднем слое линии тока имеют форму окружностей, т. е.  $\Psi_m = \Psi_m(\rho)$ .

Зададим  $\Psi_m$ , которая соответствует потенциальному профилю потока среднего слоя

$$\Psi_m = \bar{c}_\theta \rho; \quad (9-1)$$

$$c_{\theta m} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \rho}; \quad c_{\rho m} = -\frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta};$$

в нашем случае

$$c_{\theta m} = \frac{\bar{c}_\theta}{\rho \sin \theta}; \quad c_{\rho m} = 0; \quad (9-2)$$

$$U_m = \frac{\partial(\rho c_{\theta m})}{\partial \rho} - \frac{\partial c_{\rho m}}{\partial \theta} = 0.$$

До сих пор считают эти же колеса в предположении, что поток потенциален и что

$$c_{zm} = \text{const}, \text{ а } c_{rm} = 0.$$

На самом же деле  $\Psi_m = \bar{c}_\theta \cdot \rho$  соответствуют

$$c_{zm} = \frac{\bar{c}_\theta}{\rho} \text{ и } c_{rm} = \frac{\bar{c}_\theta}{\text{tg } \theta \cdot \rho},$$

т. е. ошибка при расчете этих колес уже только в этом одном допускалась грубая.

Чтобы составить уравнение среднего слоя, нам не хватает  $w_{um}$ :

$$w_{um} = \frac{c_u r m - \omega r^2}{r} = \frac{c_u r m - \omega \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho \sin \theta}.$$

В дальнейшем в этой главе идет речь только о среднем слое (кроме § 11), поэтому в конце § 9 и 10 можно опустить индекс  $m$ .

Подставим в (2-6) значение  $c_\rho$ ,  $c_\theta$  и  $w_u$ :

$$\frac{\bar{c}_\theta \cdot \sin \theta}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{c_u r - \omega \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho \sin \theta}.$$

Теперь, так как мы избавились от  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ , уравнение (2-6) стало обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Перепишем его:

$$\bar{c}_\theta \sin \theta \cdot F' = c_u r - \omega \rho^2 \sin^2 \theta. \quad (9-3)$$

Остается задать  $c_u r$ ; так как  $U=0$ , то  $c_u r = c_u r(F)$ . Нам нужно задать  $c_u r$  так, чтобы основной перепад давления происходил на входной кромке, что даст конструкцию хорошую как в кавитационном, так и в прочностном отношении. Но перепад давления находится в прямой зависимости от  $\frac{d(c_u r)}{dF}$ , т. е. нам нужно, чтобы на выходе  $\frac{d(c_u r)}{dF}$  была намного меньше чем на входе. Зададим два вида зависимостей, отвечающих изложенным выше требованиям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} 1. \quad c_u r &= \omega x^2 + e^{\ln(c_{2u} r_2 - \omega x^2) + [\ln(c_{1u} r_1 - \omega x^2) - \ln(c_{2u} r_2 - \omega x^2)] \frac{F - F_2}{F_1 - F_2}} \\ 2. \quad c_u r &= e^{\ln c_{2u} r_2 + (\ln c_{1u} r_1 - \ln c_{2u} r_2) \frac{F - F_2}{F_1 - F_2}}, \end{aligned} \quad (9-4)$$

где

$$c_{1u} r_1 = (\bar{c}_u r)_{вх}; \quad c_{2u} r_2 = (\bar{c}_u r)_{вых}.$$

Найдем для обоих случаев  $\frac{d(c_u r)}{dF}$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d(c_u r)}{dF} &= (c_u r - \omega x^2) [\ln(c_{1u} r_1 - \omega x^2) - \ln(c_{2u} r_1 - \omega x^2)] \frac{1}{F_1 - F_2} \\ 2. \quad \frac{d(c_u r)}{dF} &= c_u r \cdot (\ln c_{1u} r_1 - \ln c_{2u} r_2) \frac{1}{F_1 - F_2}. \end{aligned}$$

Как видно из полученных результатов,  $\frac{d(c_u r)}{dF}$  пропорциональна  $c_u r$ , т. е. на выходе  $\frac{d(c_u r)}{dF}$  пропорциональна  $c_{2u} r_2$ , так как в обычно встречающихся конструкциях  $c_{2u} r_2$  близка к нулю, то и перепад давления на выходной кромке мал.

Так как  $\ln$  отрицательного числа не существует, то  $\omega x^2 \leq c_{2u} r_2$ , т. е.  $\omega x^2$  мала и имеет малое регулирующее значение для перепада давления, поэтому проще пользоваться вторым вариантом уравнения с  $\omega x^2 = 0$ , регулируя перепад давления величиной  $c_{2u} r_2$ . Итак, мы останавливаемся на уравнении (9-4), отвечающем всем требованиям, изложенным выше.

Подставим значение  $c_u r$  в уравнение (9-3):

$$\bar{c}_\theta \sin \theta \cdot F' = e^{a + b \frac{F - F_2}{F_1 - F_2}} - \omega \rho^2 \sin^2 \theta, \quad (9-5)$$

где

$$a = \ln c_{2u} r_2; \quad b = \ln c_{1u} r_1 - \ln c_{2u} r_2;$$

перепишем (9-5):

$$F' = \frac{1}{\bar{c}_\theta \sin \theta} e^{a + b \frac{F - F_2}{F_1 - F_2}} - \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \sin \theta; \quad (9-6)$$

сделаем подстановку

$$a + b \frac{F - F_2}{F_1 - F_2} = \ln z; \quad b \frac{F'}{F_1 - F_2} = \frac{1}{z} z';$$

тогда

$$\frac{F_1 - F_2}{bz} z' = \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \cdot z - \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \sin \theta$$

или

$$z' = \frac{b}{(F_1 - F_2) c_\theta \sin \theta} z^2 - \frac{b \omega \rho^2 \sin \theta}{(F_1 - F_2) c_\theta} z.$$

Сделаем подстановку:

$$u = \frac{1}{z}; \quad u' = -\frac{1}{z^2} z'; \quad z' = -\frac{u'}{u^2};$$

тогда

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{b}{(F_1 - F_2) c_\theta \sin \theta} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{b \omega \rho^2 \sin \theta}{(F_1 - F_2) c_\theta} \cdot \frac{1}{u}.$$

Помножим это уравнение на  $u^2$  и получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$u' - \frac{b \omega \rho^2 \sin \theta}{(F_1 - F_2) c_\theta} u = -\frac{b}{(F_1 - F_2) c_\theta \sin \theta}. \quad (9-7)$$

Решение уравнения (9-7) запишется так:

$$u = e^{-p} \int -\frac{b}{(F_1 - F_2) c_\theta \sin \theta} \cdot e^p \cdot d\theta, \quad (9-8)$$

где

$$p = \int -\frac{b \omega \rho^2 \sin \theta}{(F_1 - F_2) c_\theta} d\theta = \frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} \cos \theta;$$

$$u = e^{-\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} \cos \theta} \cdot \left[ \int -\frac{b}{(F_1 - F_2) c_\theta \sin \theta} e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} \cos \theta} d\theta + \chi(p) \right],$$

остается взять интеграл

$$I = \int \frac{1}{\sin \theta} \cdot e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} \cos \theta} d\theta;$$

делаем подстановку:

$$\cos \theta = y; \quad -\sin \theta \cdot d\theta = dy; \quad d\theta = -\frac{dy}{\sin \theta};$$

тогда

$$I = \int -\frac{1}{\sin^2 \theta} e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} y} dy = -\int \frac{1}{1 - y^2} e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} y} dy;$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[ \int \frac{e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} y}}{1 + y} dy + \int \frac{e^{\frac{b \omega \rho^2}{(F_1 - F_2) c_\theta} y}}{1 - y} dy \right].$$

Делаем в оба интеграла соответственно подстановки:

$$1 + y = t; \quad 1 - y = s;$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[ \int e^{\frac{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}(t-1)}{t}} dt + \int e^{-\frac{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}(s-1)}{s}} ds \right];$$

$$I = -\frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}} \int e^{\frac{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}t}{t}} dt - e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}} \int e^{-\frac{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}s}{s}} ds \right].$$

Известно, что  $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$  не выражается в элементарных функциях и является специальной интегральной показательной функцией  $Ei(ax)$ , которая затабулирована, например, в книге Шпильрейна — „Таблицы специальных функций“, 1933, ОНТИ.

Итак,

$$I = -\frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}} Ei \left[ \frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta} (1 + \cos \theta) \right] - e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}} Ei \left[ \frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta} (-1 + \cos \theta) \right] \right\}. \quad (9-9)$$

Следовательно,

$$u = -e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta} \cos \theta} \cdot \frac{b}{2(F_1-F_2)\bar{c}_\theta} \{I + \chi(\rho)\}; \quad (9-10)$$

$$z = \frac{1}{u}; \quad \ln z = -\ln u = a + b \frac{F - F_2}{F_1 - F_2}.$$

Отсюда

$$\frac{F - F_2}{F_1 - F_2} = -\frac{1}{b} [\ln u + a]. \quad (9-11)$$

Выбором  $\chi(\rho)$  мы также можем регулировать форму лопасти рабочего колеса.

Обыкновенно с точки зрения хорошей каплановской характеристики применяются конструкции: меридиан  $\frac{F - F_2}{F_1 - F_2} = 0,6$  представляет собой прямую линию  $\theta = \theta_0$ .

Примем:

$$\chi(\rho) = -I_{\theta_0} - \frac{1}{e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)\bar{c}_\theta} \cos \theta_0} \frac{b}{2(F_1-F_2)\bar{c}_\theta}} \cdot e^{-a-0,6b};$$

тогда

$$U = -e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)c_\theta} \cos \theta} \cdot \frac{b}{2(F_1-F_2)c_\theta} \{I - I_{\theta_0}\} + \\ + e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)c_\theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - a - 0,6b} \quad (9-12)$$

и

$$\frac{F - F_2}{F_1 - F_2} = -\frac{1}{b} \left\{ \ln \left[ -e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)c_\theta} \cos \theta} \cdot \frac{b}{2(F_1-F_2)c_\theta} (I - I_{\theta_0}) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1-F_2)c_\theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - a - 0,6b} \right] + a \right\}.$$

Из этой формулы ясно видно, что  $\frac{F - F_2}{F_1 - F_2} = 0,6$  при  $\theta = \theta_0$ .

**10. Вычисление**  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$ ;  $\frac{\partial^3 F}{\partial \rho^3}$ ;  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ ;  $\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3}$ ;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta}$$
;  $\frac{\partial^3 F}{\partial \rho \partial \theta^2}$ ;  $\frac{\partial^3 F}{\partial \rho^2 \partial \theta}$ .

Как видно из уравнения (9-3),

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{c_\theta \sin \theta} c_{ur} - \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \sin \theta. \quad (10-1)$$

Начнем дифференцировать (10-1) по  $\theta$  и  $\rho$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\frac{\cos \theta}{c_\theta \sin^2 \theta} c_{ur} + \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \frac{d(c_{ur})}{dF} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \cos \theta; \quad (10-2)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} = \frac{c_{ur}}{c_\theta} \left( \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \right) - \frac{\cos \theta}{c_\theta \sin^2 \theta} \frac{d(c_{ur})}{dF} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \sin \theta - \\ - \frac{\cos \theta}{c_\theta \sin^2 \theta} \cdot \frac{d(c_{ur})}{dF} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \cdot \frac{d^2(c_{ur})}{dF^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \frac{d(c_{ur})}{dF} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

или

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3} = \frac{c_{ur}(\cos^2 \theta + 1)}{c_\theta \sin^3 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{c_\theta \sin^2 \theta} \cdot \frac{d(c_{ur})}{dF} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{c_\theta} \omega \rho^2 \sin \theta + \\ + \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \left[ \frac{d^2(c_{ur})}{dF^2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{d(c_{ur})}{dF} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right]; \quad (10-3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \cdot \frac{d(c_{ur})}{dF} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{2\omega \rho \sin \theta}{c_\theta}; \quad (10-4)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \rho^2 \partial \theta} = \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \left[ \frac{d^2(c_{ur})}{dF^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{d(c_{ur})}{dF} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \right] - \frac{2\omega \sin \theta}{c_\theta}; \quad (10-5)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \rho \partial \theta^2} = -\frac{\cos \theta}{c_\theta \sin^2 \theta} \cdot \frac{d(c_u r)}{dF} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} +$$

$$+ \frac{1}{c_\theta \sin \theta} \left[ \frac{d^2(c_u r)}{dF^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{d(c_u r)}{dF} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} \right] - \frac{2}{c_\theta} \omega \rho \cos \theta. \quad (10-6)$$

Остается подсчитать  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ ;  $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$  и  $\frac{\partial^3 F}{\partial \rho^3}$ .

Продифференцируем (9-11) по  $\rho$ :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{(F_1 - F_2)}{b} \cdot \frac{\partial u}{u}; \quad (10-7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = -\frac{(F_1 - F_2)}{b} \frac{u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2}{u^2} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}}{u^2} \cdot \frac{(F_1 - F_2)}{b}; \quad (10-8)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \rho^3} = \frac{2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \right] - u \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} - \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right)}{u^3} \cdot \frac{(F_1 - F_2)}{b}. \quad (10-9)$$

Теперь раскроем  $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ ;  $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$  и  $\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}$ .

Продифференцируем (9-12) по  $\rho$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2b\omega\rho}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \left[ \frac{b \cos \theta}{2(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \cos \theta} (I - I_{\theta_0}) + \right.$$

$$\left. + (\cos \theta_0 - \cos \theta) e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \alpha - 0,6b} \right] -$$

$$- \frac{b}{2(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \cos \theta} \left( \frac{\partial I}{\partial \rho} - \frac{\partial I_{\theta_0}}{\partial \rho} \right); \quad (10-10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \cos \theta} \left\{ \left[ \frac{b^2 \omega \cos \theta}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2} - \frac{2b^3 \omega^2 \rho \cos^2 \theta}{(F_1 - F_2)^3 \bar{c}_\theta^3} \right] (I - I_{\theta_0}) + \right.$$

$$\left. + \frac{2b^2 \omega \rho \cos \theta}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2} \left( \frac{\partial I}{\partial \rho} - \frac{\partial I_{\theta_0}}{\partial \rho} \right) - \frac{b}{2(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 I_{\theta_0}}{\partial \rho^2} \right) \right\} +$$

$$+ e^{-\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \alpha - 0,6b} \cdot \left\{ \frac{2b\omega (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{2b\omega (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{(F_1 - F_2)\bar{c}_\theta} \right]^2 \rho \right\}; \quad (10-11)$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} = & e^{-\frac{b\omega\rho^2 \cos \theta}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta}} \left\{ \left[ \frac{4b^4\omega^3 \cos^3 \theta \rho^2}{(F_1 - F_2)^4 \bar{c}_\theta^4} - \frac{2b^3\omega^2 \cos^2 \theta \rho}{(F_1 - F_2)^3 \bar{c}_\theta^3} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2b^3\omega^2 \cos^2 \theta}{(F_1 - F_2)^3 \bar{c}_\theta^3} \right] (I - I_{\theta_0}) + \left[ \frac{b^2\omega \cos \theta}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2b^3\omega^2 \cos^2 \theta \rho (1 + 2\rho)}{(F_1 - F_2)^3 \bar{c}_\theta^3} \right] \left( \frac{\partial I}{\partial \rho} - \frac{\partial I_{\theta_0}}{\partial \rho} \right) + \frac{3b^2\omega \cos \theta \rho}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 I_{\theta_0}}{\partial \rho^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{b}{2(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \left( \frac{\partial^3 I}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^3 I_{\theta_0}}{\partial \rho^3} \right) + \right. \\
& + e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - a - 0,6b} \left\{ \left[ \frac{2b\omega (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^2 (1 + \rho) + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{2b\omega (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^3 \rho^2 \right\}. \quad (10-12)
\end{aligned}$$

Остается подсчитать:  $\frac{\partial I}{\partial \rho}$ ;  $\frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2}$  и  $\frac{\partial^3 I}{\partial \rho^3}$ :

$$\frac{\partial I}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \int \frac{1}{\sin \theta} e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta} d\theta;$$

$$\frac{\partial I}{\partial \rho} = \int \frac{2b\omega\rho \cos \theta}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta \sin \theta} e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta} d\theta;$$

$$\frac{\partial I}{\partial \rho} = \frac{2b\omega\rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \int \frac{v}{v^2 - 1} e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} v} dv;$$

$$\frac{\partial I}{\partial \rho} = \frac{2b\omega\rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \int \left( \frac{v-1}{v^2-1} + \frac{1}{v^2-1} \right) e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} v} dv;$$

$$\frac{\partial I}{\partial \rho} = \frac{2b\omega\rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \left( \int \frac{1}{v+1} e^{\frac{b\omega\rho^2 v}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta}} dv + \int \frac{1}{v^2-1} e^{\frac{b\omega\rho^2 v}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta}} dv \right)$$

или окончательно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \rho} = & \frac{b\omega\rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \left\{ e^{\frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta}} Ei \left[ \frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} (-1 + \cos \theta) \right] - \right. \\
& \left. - 3e^{\frac{-b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta}} Ei \left[ \frac{b\omega\rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} (1 + \cos \theta) \right] \right\}. \quad (10-13)
\end{aligned}$$

Еще раз продифференцируем по  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} &= - \int \frac{2b\omega \cos \theta}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta \sin \theta} \cdot e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta} d\theta - \\ &- \int \frac{4b^2 \omega^2 \rho^2 \cos^2 \theta}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2 \sin \theta} e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta} d\theta; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} - \left[ \frac{2b\omega \rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^2 \int \frac{v^2}{v^2 - 1} e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} v} dv; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} - \left[ \frac{2b\omega \rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^2 \cdot \left[ \int \frac{v^2 - 1}{v^2 - 1} e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} v} dv + \right. \\ &\left. + \int \frac{1}{v^2 - 1} e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} v} dv \right]; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial I}{\partial \rho} - \frac{4b\omega}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta} - \left[ \frac{2b\omega \rho}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^2 I. \quad (10-14) \end{aligned}$$

Наконец, продифференцируем (10-14) по  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 I}{\partial \rho^3} &= \frac{\partial^2 I}{\partial \rho^2} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial I}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \left[ \frac{2b\omega \rho}{(F_1 - F) \bar{c}_\theta} \right]^2 \right\} - I \frac{8b^2 \omega^2 \rho}{(F_1 - F_2)^2 \bar{c}_\theta^2} - \\ &- 2\rho \cos \theta \left[ \frac{2b\omega}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \right]^2 e^{\frac{b\omega \rho^2}{(F_1 - F_2) \bar{c}_\theta} \cos \theta}. \quad (10-15) \end{aligned}$$

## 11. Уточнение расчетного $Q'_1$ . Подсчет $\sigma$

Задавшись в начале расчета  $Q'_1$ , мы должны определить приблизительно  $\bar{c}_\theta$ , соответствующее этому  $Q'_1$ .

Ясно, что

$$Q'_1 \approx \iint_{K_{\theta_0}} c_{\theta,m} \cdot ds,$$

где  $K_{\theta_0}$  — кольцо между втулкой и шахтой при  $\theta = \theta_0 = 90^\circ$ .

$$c_{\theta,m} = \frac{\bar{c}_\theta}{\rho \sin \theta_0} = \frac{\bar{c}_\theta}{\rho}; \quad ds = \rho \sin \theta_0 d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

Таким образом,

$$Q'_1 \approx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_{em}}^{\rho_{iu}=0,5} \frac{\bar{c}_\theta}{\rho} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \bar{c}_\theta (0,5 - \rho_{em}) = 2\pi \bar{c}_\theta (0,5 - \rho_{em}).$$

Таким образом, задаемся  $\bar{c}_\theta$  по формуле

$$\bar{c}_\theta = \frac{Q'_1}{2\pi(0,5 - \rho_{\theta m})} \quad (11-1)$$

Далее, произведя подсчет всех параметров колеса, зная истинное распределение  $c_\theta$ , нужно подсчитать расчетное  $Q'_1$ :

$$Q'_1 = \int_{\rho_{\theta m}}^{\rho_{\theta m}=0,5} d\rho \cdot \rho \int_{\psi_\sigma}^{\psi_\tau} \left[ c_{\theta_0 m} + \left( \frac{\partial c_{\theta_0}}{\partial \varphi} \right)_m \psi + \left( \frac{\partial^2 c_{\theta_0}}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{\psi^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 c_{\theta_0}}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi^3}{3!} \right] d\varphi,$$

где  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  — соответственно координаты точек на поверхностях разряжения и давления лопасти.

Или

$$Q'_1 = \int_{\rho_{\theta m}}^{\rho_{\theta m}=0,5} \rho \cdot d\rho \left[ c_{\theta_0 m} (\psi_\tau - \psi_\sigma) + \left( \frac{\partial c_{\theta_0}}{\partial \varphi} \right)_m \left( \frac{\psi_\tau^2 - \psi_\sigma^2}{2} \right) + \left( \frac{\partial^2 c_{\theta_0}}{\partial \varphi^2} \right)_m \left( \frac{\psi_\tau^3 - \psi_\sigma^3}{3!} \right) + \left( \frac{\partial^3 c_{\theta_0}}{\partial \varphi^3} \right)_m \left( \frac{\psi_\tau^4 - \psi_\sigma^4}{4!} \right) \right]. \quad (11-2)$$

Этот интеграл подсчитывается графически.

Определяем теперь  $\sigma$  расчетное.

Из уравнения (3-8) видно, что

$$\sigma = (\omega_\sigma^2 - \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta) \frac{1}{2g} - \frac{v_5^2}{2g} - \sum_2^5 h_i, \quad (11-3)$$

где 5 — выход из всасывающей трубы;

$$\sigma = \left\{ \left[ \omega_m + \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)_m \psi_\sigma + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{\psi_\sigma^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 \omega}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi_\sigma^3}{3!} \right]^2 - \omega^2 \rho^2 \sin^2 \theta \right\} \frac{1}{2g} - \frac{v_5^2}{2g} - \sum_2^5 h_i. \quad (11-4)$$

Из формул для  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)_m$ ;  $\left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right)_m$ ;  $\left( \frac{\partial^3 \omega}{\partial \varphi^3} \right)_m$  ясно, что они принимают максимальное по абсолютной величине значение при  $\rho = \rho_{\theta m}$ , но  $\left( \frac{\partial^n \omega}{\partial \varphi^n} \right)_m < 0$  и  $\psi_\sigma < 0$ .

Значит,  $\sigma$  принимает максимальное значение при  $\rho = \rho_{\theta m}$ . Подсчитав значение  $\sigma$  для ряда значений  $\theta$  от входа до выхода на  $\rho = \rho_{\theta m}$ , выбирают из них максимальное значение  $\sigma$ , это и есть  $\sigma$  расчетное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПОТОКА, ВЫЗВАННОГО  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ВТУЛКЕ И ОБОДЕ

12. Общие соображения

Расчет колеса ведется обыкновенно на  $D_{ш} = 1$  м при  $H = 1$  м. Для расчета необходимо задание следующих величин:  $Q_1'$ , т. е. в нашем случае задание  $\bar{c}_0$ ;  $n_1'$ , т. е.  $\omega$ ;  $\rho_{вт}$ ,  $(\bar{c}_u r)_{вх}$ .

Таким образом, мы имеем следующую картину.

Нам заданы условия на четырех границах:

вход  $(\bar{c}_u r)_{вх} = \text{const}$ ;

выход  $(\bar{c}_u r)_{вых} = \text{const}$ ;

втулка  $c_p = 0$ ;

шахта  $c_p = 0$ ,

т. е. мы должны сконструировать поток, отвечающий граничным условиям и имеющий заданный  $Q_1'$ , задание  $(\bar{c}_u r)_{вх}$  и

$(\bar{c}_u r)_{вых}$  определяет  $\omega$ , так как  $(\bar{c}_u r)_{вх} - (\bar{c}_u r)_{вых} = \frac{\eta g}{\omega}$ , а затем

найти две недостающие границы поверхности давления и разрежения с граничными условиями  $n_{\sigma(\tau)c} = 0$ . В дополнение заметим, что точки этих поверхностей отстоят друг от друга на угловом расстоянии  $2(\psi_0 - \alpha)$ .

Как видно из предыдущего, проще конструируется поток, имеющий средний слой.

Прежде всего задается поток на среднем слое, как видно из предыдущей главы, он отвечает всем граничным условиям и заданным величинам. Скорости же во всех других точках потока, не принадлежащих среднему слою, определяются рядом Маклорена (2-10).

Так как и на шахте и на втулке в общем случае  $\left(\frac{\partial c_p}{\partial \varphi}\right)_m$ ;  $\left(\frac{\partial^n c_p}{\partial \varphi^n}\right)_m$  не равны нулю, то и не равна нулю  $c_p$  и на шахте и на втулке в точках, не относящихся к среднему слою, т. е. наш поток не отвечает граничным условиям на шахте и втулке.

Чтобы получить поток, отвечающий граничным условиям на шахте и втулке, нужно на основной поток наложить дополнительный, имеющий во всех точках на шахте и втулке радиальные скорости, равные по величине радиальным скоростям основного потока и обратные им по направлению.

К тому же дополнительный поток должен быть потенциальным. Таким образом, весь вопрос сводится к решению задачи Неймана для двух сфер с граничными условиями:

$$\left(\frac{\partial u_{\partial}}{\partial \rho}\right)_{\rho_{\text{вм}}} = f_1(\theta; \varphi); \quad \left(\frac{\partial U_{\partial}}{\partial \rho}\right)_{\rho_{\text{из}}} = f_2(\theta; \varphi).$$

Эта задача очень трудна и ее решение выражается рядами сферических функций. Но поскольку  $\left(\frac{\partial c_{\rho}}{\partial \varphi}\right)_m$  меняет знак при переходе через горизонтальный меридиан, поверхность сферы (шахты и втулки) делится на такие части:

1. До входа в рабочее колесо  $\left(\frac{\partial c_{\rho}}{\partial \varphi}\right)_m = 0$ ;  $\left(\frac{\partial^2 c_{\rho}}{\partial \varphi^2}\right)_m = 0$ , т.е.  $c_{\rho} = 0$ .

2. После выхода аналогично  $c_{\rho} = 0$ .

Между входом и выходом:

Выше горизонтального меридиана

3. Со стороны всасывания  $c_{\rho} > 0$ .

4. Со стороны давления  $c_{\rho} < 0$ .

Ниже горизонтального меридиана

5. Со стороны всасывания  $c_{\rho} < 0$ .

6. Со стороны давления  $c_{\rho} > 0$ .

Таким образом, дополнительный поток сводится в основном к перетеканию в пределах непосредственной близости к шахте (втулке), и мы можем решать задачу Неймана изолированно для втулки от шахты и обратно.

Таким образом, весь вопрос свелся к решению внутренней задачи для шахты и независимо от нее к решению внешней задачи для втулки.

### 13. Решение задачи Неймана

Решение внешней и внутренней задач Неймана [Л. 3] для сферы может быть получено из решения задачи Дирихле. Это достигается при помощи леммы:

Если  $v(\rho; \theta; \varphi)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то  $v_1 = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$  также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, задав граничные условия

$$v_1(\rho_{\text{вм}}; \theta; \varphi) = \rho_{\text{вм}} \cdot f_1 \quad \text{и} \quad v_1(\rho_{\text{из}}; \theta; \varphi) = \rho_{\text{из}} \cdot f_2,$$

решаем задачу Дирихле (интеграл Пуассона). Искомая функция

$$v = \int_0^{\rho} \frac{v_1}{\rho} d\rho + \text{const} \quad (13-1)$$

— внутренняя задача и

$$v = \int_{\infty}^{\rho} \frac{v_1}{\rho} d\rho \quad (13-2)$$

— внешняя задача.

Решение внешней задачи Неймана  
для втулки

$a_1(\rho_{em}; \varphi_1; \theta_1)$  — точка, принадлежащая втулке;

$a'(\rho'; \varphi'; \theta')$  — точка вне втулки;

$r'$  — расстояние между  $a_1$  и  $a'$ .

По формуле Пуассона получаем:

$$\rho' \frac{\partial v'(\rho'; \varphi'; \theta')}{\partial \rho'} = -\frac{1}{4\pi\rho_{em}} \iint_{s_{em}} \rho_{em} f_1(\varphi_1; \theta_1) \frac{\rho_{em}^2 - (\rho')^2}{(r')^3} ds \quad (13-3)$$

или

$$c'_{\rho\partial}(\rho'; \varphi'; \theta') = \frac{\partial v'(\rho'; \varphi'; \theta')}{\partial \rho'} = -\frac{1}{4\pi\rho'} \iint_{s_{em}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \frac{\rho_{em}^2 - (\rho')^2}{(r')^3} ds. \quad (13-4)$$

Используя (13-2), получаем:

$$v'(\rho'; \varphi'; \theta') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s_{em}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \left[ \frac{2}{r'} - \frac{1}{\rho_{em}} \ln \frac{\rho_{em} - \rho' \cos \gamma' + r'}{\rho'(1 - \cos \gamma')} \right] ds, \quad (13-5)$$

где

$$(r')^2 = \rho_{em}^2 + (\rho')^2 - 2\rho_{em}\rho' \cos \gamma';$$

$$\cos \gamma' = \cos \theta' \cos \theta_1 + \sin \theta' \cdot \sin \theta_1 \cos(\varphi' - \varphi_1);$$

$$c'_{\theta\partial} = \frac{\partial v'}{\rho' \partial \theta'} = \frac{1}{4\pi\rho'} \iint_{s_{em}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \left[ \frac{2 \cdot \frac{\partial r'}{\partial \theta'}}{(r')^2} + \frac{\rho'(1 - \cos \gamma')}{\rho_{em}(\rho_{em} - \rho' \cos \gamma' + r')} \times \right. \\ \left. \times \frac{\rho'(1 - \cos \gamma') \cdot \left[ \frac{\partial r'}{\partial \theta'} - \rho' \frac{\partial(\cos \gamma')}{\partial \theta'} \right] + \rho' \frac{\partial(\cos \gamma')}{\partial \theta'} (\rho_{em} - \rho' \cos \gamma' + r')}{(\rho')^2 (1 - \cos \gamma')^2} \right] ds,$$

или

$$c'_{\theta\partial} = \frac{\rho_{em}}{4\pi\rho'} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdot \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2\rho_{em}\rho'}{(r')^3} + \right. \\ \left. + \frac{\rho'(1 - \cos \gamma') \cdot \left( \frac{1}{r'} \rho' \rho_{em} - \rho' \right) + \rho' (\rho_{em} - \rho' \cos \gamma' + r')}{\rho_{em} \cdot \rho' \cdot (1 - \cos \gamma') \cdot (\rho_{em} - \rho' \cos \gamma' + r')} \right] \frac{\partial(\cos \gamma')}{\partial \theta'} \times \\ \times f_1(\theta_1; \varphi_1) d\varphi_1, \quad (13-6)$$

где

$$\frac{\partial(\cos \gamma')}{\partial \theta'} = -\sin \theta' \cos \theta_1 + \cos \theta' \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos(\varphi' - \varphi_1), \quad (13-7)$$

или иначе

$$c'_{\theta\partial} = \frac{\rho_{em}}{4\pi\rho'} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} L' \cdot \frac{\partial(\cos \gamma')}{\partial \theta'} f(\theta_1; \varphi_1) d\varphi_1; \quad (13-6')$$

далее,

$$c'_{\varphi\partial} = \frac{\partial v'}{\partial \varphi'} \cdot \frac{1}{\rho' \sin \theta'} =$$

$$= \frac{\rho_{sm}}{4\pi \rho' \sin \theta'} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} L' \cdot \frac{\partial \cos \gamma'}{\partial \varphi'} f_1(\theta_1; \varphi_1) d\varphi_1 \quad (13-8)$$

где

$$\frac{\partial (\cos \gamma')}{\partial \varphi'} = -\sin \theta' \cdot \sin \theta_1 \sin (\varphi' - \varphi_1), \quad (13-9)$$

или можно переписать:

$$c'_{\varphi\partial} = -\frac{\rho_{sm}}{4\pi \rho'} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \sin^2 \theta_1 \int_0^{2\pi} L' \cdot f_1(\theta_1; \varphi_1) \sin (\varphi' - \varphi_1) d\varphi_1. \quad (13-8')$$

В дальнейшем нам понадобится следующая величина:

$$\frac{\partial [c'_{\rho\partial} (\rho')^2]}{\partial \rho'} = \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[ -\frac{\rho'}{4\pi} \iint_{s_{sm}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \frac{\rho_{sm}^2 - (\rho')^2}{(r')^3} ds \right];$$

$$\frac{\partial [c'_{\rho\partial} (\rho')^2]}{\partial \rho'} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s_{sm}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \frac{\rho_{sm}^2 - (\rho')^2}{(r')^3} ds -$$

$$-\frac{\rho'}{4\pi} \iint_{s_{sm}} f_1(\varphi_1; \theta_1) \left[ \frac{\rho_{sm}^2}{(r')^4} \frac{\partial r'}{\partial \rho'} - \frac{(r')^3 \cdot 2\rho' - 3(r')^2 \cdot \frac{\partial r'}{\partial \rho'} (\rho')^2}{(r')^6} \right] ds$$

или

$$\frac{\partial [c'_{\rho\partial} (\rho')^2]}{\partial \rho'} = -\frac{\rho_{sm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1; \theta_1) \frac{\rho_{sm}^2 - (\rho')^2}{(r')^3} d\varphi_1 -$$

$$-\frac{\rho' \rho_{sm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_1 \cdot d\theta_1 \int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1; \theta_1) \cdot \frac{\frac{\partial r'}{\partial \rho'} [\rho_{sm}^2 + 3(\rho')^2] - 2r' \rho'}{(r')^4} \cdot d\varphi_1, \quad (13-10)$$

где

$$\frac{\partial r'}{\partial \rho'} = \frac{\rho' - 2\rho_{sm} \cos \gamma'}{r'}. \quad (13-11)$$

Решение внутренней задачи Неймана  
для шахты

$a_2(\rho_{u2}; \varphi_2; \theta_2)$  — точка, принадлежащая шахте;

$a''(\rho''; \varphi''; \theta'')$  — точка вне шахты;

$r''$  — расстояние между  $a_2$  и  $a''$ .

Аналогично внешней задаче получаем:

$$\frac{\rho'' \partial v''(\rho''; \varphi''; \theta'')}{\partial \rho''} = -\frac{1}{4\pi \rho_{uu}} \iint_{s_{uu}} \rho_{uu} f_2(\theta_2; \varphi_2) \frac{\rho_{uu}^2 - (\rho'')^2}{(r'')^3} ds; \quad (13-12)$$

По теореме Гаусса поверхностный интеграл скорости по этому телу равен нулю:

$$\iint_{\Delta K_i} c_n dS + \iint_{\Delta K_j} c_n dS + \iint_{S_1} c_n dS + \iint_{S_2} c_n dS + \\ + \iint_{\Delta F} c_n dS + \iint_{\Delta \sigma (\Delta \tau)} c_n dS = 0. \quad (14-1)$$

Если

$$\iint_{\Delta K_i} c_n dS + \iint_{\Delta K_j} c_n dS + \iint_{S_1} c_n dS + \iint_{S_2} c_n dS + \iint_{\Delta F} c_n dS = 0, \quad (14-2)$$

то

$$\iint_{\Delta \sigma (\Delta \tau)} c_n dS = 0.$$

Пусть это справедливо для всех  $K$ . Если возьмем  $K_i$  и  $K_j$  на расстоянии  $d\theta$ , то

$$\iint_{\Delta \sigma (\Delta \tau)} c_n dS = d\rho \cdot \rho \cdot d\theta \cdot c_n \cdot \cos \gamma = 0,$$

т. е.  $c_n = 0$  по всей поверхности, отвечающей во всех своих точках условию (14-2).

В условие (14-2) входят поверхностные интегралы от двух потоков основного и дополнительного ( $c_{n_0}$  и  $c_{n_\partial}$ ).

Перепишем (14-2):

$$\iint_{\Delta K_i} c_{n_0} dS + \iint_{\Delta K_j} c_{n_0} dS + \iint_{S_1} c_{n_0} dS + \iint_{S_2} c_{n_0} dS + \\ + \iint_{\Delta F} c_{n_0} dS + \iint_{\Delta K_i; \Delta K_j; S_1; S_2; \Delta F} c_{n_\partial} dS = 0, \quad (14-3)$$

но

$$\iint_{\Delta F} c_{n_0} dS = 0. \quad (14-4)$$

Таким образом, учтя (14-4), получаем в общем виде условие касания

$$\iint_{\Delta K_i} c_{n_0} dS + \iint_{\Delta K_j} c_{n_0} dS + \iint_{S_1} c_{n_0} dS + \\ + \iint_{S_2} c_{n_0} dS + \iint_{\Delta K_i \Delta K_j S_1 S_2 \Delta F} c_{n_\partial} dS = 0. \quad (14-5)$$

Введем следующие обозначения:

$2\alpha$  — угол телесности лопасти;

$2\rho \sin \theta$  — толщина лопасти;

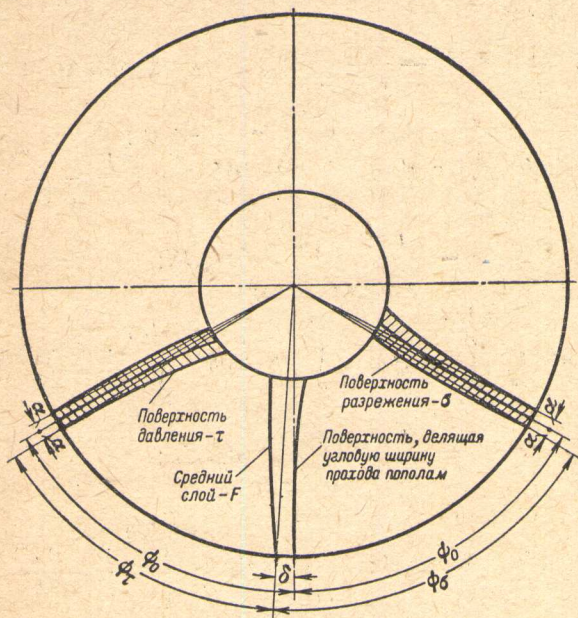


- $\psi_\tau$  — угол между средним слоем и поверхностью давления;  
 $\psi_\sigma$  — угол между средним слоем и поверхностью разрежения;  
 $2\psi_0$  — угловая ширина прохода без учета телесности лопастей; не зависит от  $\theta$ ;  $\psi_0 = \text{const}$ ;

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{2z} = \frac{\pi}{z};$$

$z$  — число лопастей;

$\lambda$  — угол между средним слоем и поверхностью, делящей проход пополам (фиг. 2).



Фиг. 2.

Тогда  $\psi_\tau = (\psi_0 - \alpha) - \delta$ ;  $\psi_\sigma = (-\psi_0 + \alpha) - \delta$ ; (14-6)

Расшифруем (14-5), пренебрегая в  $\iint_S c_{n_\sigma} dS$  величиной  $\delta$  и  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 & d\rho \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_i} c_{\theta\rho} \sin \theta_i \cdot d\varphi - d\rho \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_j} c_{\theta\rho} \sin \theta_j d\varphi + \\
 & + \int_{\theta_i}^{\theta_j} d\theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} (c_\rho \rho^2) \sin \theta d\varphi - \int_{\theta_i}^{\theta_j} d\theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \left[ c_\rho \rho^2 + \frac{\partial(c_\rho \rho^2)}{\partial \rho} d\rho \right] \sin \theta d\varphi + \\
 & + \iint_{\Delta K_1 \Delta K_j S_1 S_2 \Delta F} c_{n_\sigma} dS = 0. \quad (14-7)
 \end{aligned}$$

Приведя в (14-7) подобные члены и поделив это выражение на  $\rho d\rho$ , получаем условие касания в следующем виде:

$$\sin \theta_i \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_i} c_\theta d\varphi - \sin \theta_j \int_0^{\psi_\sigma(\tau)} c_\theta d\varphi - \int_{\theta_i}^{\theta_j} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(c_\rho \rho^2)}{\partial \rho} d\varphi + \frac{1}{\rho d\rho} \iint_{\Delta K_i \Delta K_j S_1 S_2 \Delta F} c_{n\partial} dS = 0. \quad (14-8)$$

Если выход и вход на рабочее колесо обозначить индексами I и II, то можно ввести новую функцию  $x_{\sigma(\tau)}$ :

$$x_{\sigma(\tau)_I} = \sin \theta_i \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_I} c_\theta d\varphi - \frac{1}{\rho d\rho} \iint_{\Delta K_I} c_{n\partial} dS \text{ — на входе при } \theta = \theta_I;$$

$$x_{\sigma(\tau)_i} = \sin \theta_i \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_i} c_\theta d\varphi + \int_{\theta_I}^{\theta_i} d\theta \cdot \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(c_\rho \rho^2)}{\partial \rho} d\varphi - \frac{1}{\rho d\rho} \iint_{\Delta K_I \Delta K_i S_1 S_2 \Delta F} c_{n\partial} dS;$$

$$x_{\sigma(\tau)_j} = \sin \theta_j \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_j} c_\theta d\varphi + \int_{\theta_I}^{\theta_j} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(c_\rho \rho^2)}{\partial \rho} d\varphi - \frac{1}{\rho d\rho} \iint_{\Delta K_I \Delta K_j S_1 S_2 \Delta F} c_{n\partial} dS; \quad (14-9)$$

$$x_{\sigma(\tau)_{II}} = \sin \theta_{II} \int_0^{\psi_\sigma(\tau)_{II}} c_\theta d\varphi + \int_{\theta_I}^{\theta_{II}} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(c_\rho \rho^2)}{\partial \rho} d\varphi - \frac{1}{\rho d\rho} \iint_{\Delta K_I \Delta K_{II} S_1 S_2 \Delta F} c_{n\partial} dS \text{ — на выходе при } \theta = \theta_{II}.$$

Определим  $x_{\sigma(\tau)}$  не зависящей от  $\theta$   $x_{\sigma(\tau)} = \text{const}$  при  $\rho = \text{const}$ . Приравняв  $x_{\sigma(\tau)_1}$  и  $x_{\sigma(\tau)_2}$ , получаем (14-8), т. е. такое определение  $x_{\sigma(\tau)}$  дает нам поверхность  $\sigma(\tau)$ , касательную к потоку.

Введем обозначения:

$$x_\sigma = \bar{x} - \Delta x; \quad x_\tau = \bar{x} - \Delta x \quad (14-10)$$

или

$$\bar{x} = \frac{x_\tau - x_\sigma}{2}; \quad \Delta x = \frac{-x_\tau - \Delta x_\sigma}{2}.$$

Из (14-10) видно, что  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  не зависят от  $\theta$ :

$$\bar{x}_I = \bar{x}_{II}; \quad \Delta x_I = \Delta x_{II}. \quad (14-11)$$

## 15. Определение угла $\delta$ между средним слоем и поверхностью, делящей пополам проход рабочего колеса

Обозначим:

$$\varepsilon_{\sigma}(\tau)_{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \iint_{\Delta K_I \Delta K_S, S_2 \Delta F} c_{n\partial} dS \quad (15-1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma}(\tau)_{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} & \left[ \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} c_{\theta\partial I} \rho \cdot \sin \theta_I d\varphi d\rho - \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} c_{\theta\partial} \cdot \rho \cdot \sin \theta d\varphi d\rho - \right. \\ & - \int_{\theta_I}^{\theta} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\rho} d\rho \cdot d\varphi \pm \left( \int_{\theta_I}^{\theta} c_{\varphi\partial} d\rho \cdot \rho d\theta + \right. \\ & \left. \left. + \int_{F_1}^F c_{\theta\partial} d\rho \rho \sin \theta dF + \int_{\theta_I}^{\theta} c_{\rho\partial}\rho^2 \sin \theta dF d\theta \right) \right] \end{aligned}$$

или окончательно

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma}(\tau)_{\theta} = & \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} (c_{\theta\partial I} \sin \theta_I - c_{\theta\partial} \cdot \sin \theta) d\varphi - \\ & - \int_{\theta_I}^{\theta} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\rho} d\rho \pm \\ & \pm \int_{\theta_I}^{\theta} (c_{\varphi\partial} + c_{\rho\partial} \cdot \rho \sin \theta \frac{\partial F}{\partial\rho}) d\theta \pm \int_{F_1}^{F_2} c_{\theta\partial} \cdot \sin \theta dF, \quad (15-1') \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\xi_{\sigma}(\tau)_{\theta} = \int_{\theta_I}^{\theta} d\theta \sin \theta \int_0^{-\psi_0(\psi_0)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\rho} d\rho, \quad (15-2)$$

по

$$\frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\rho} = \frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial P} - \frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\varphi} \frac{\partial F_m}{\partial\rho}.$$

В свою очередь

$$c_{\rho} = c_{\rho m} + \left( \frac{\partial c_{\rho}}{\partial\varphi} \right)_m \psi + \left( \frac{\partial^2 c_{\rho}}{\partial\varphi^2} \right)_m \frac{\psi^2}{2!} + \left( \frac{\partial^3 c_{\rho}}{\partial\varphi^3} \right)_m \frac{\psi^3}{3!}.$$

Вообще в наших формулах мы можем ограничиться третьими производными скоростей, так как это обеспечивает вполне достаточную точность:

$$\frac{\partial(c_{\rho\partial}\rho^2)}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial c_{\rho}}{\partial\varphi} \right)_m \right] \psi + \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^2 c_{\rho}}{\partial\varphi^2} \right)_m \right] \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^3 c_{\rho}}{\partial\varphi^3} \right)_m \right] \frac{\psi^3}{3!} -$$

$$-\rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \psi + \left( \frac{\partial^3 c_\rho}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi^2}{2} \right]. \quad (15-3)$$

И окончательно, пренебрегая  $\frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^3 c_\rho}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] \frac{\psi^3}{3}$ , получим:

$$\begin{aligned} \xi_{\sigma\theta} = & \int_{\theta_I}^{\theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \right] \frac{\psi_0^2}{2} - \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \frac{\psi_0^3}{3!} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \psi_0 - \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{\psi_0^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 c_\rho}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi_0^3}{3!} \right] \right\} d\theta; \quad (15-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\tau\theta} = & \int_{\theta_I}^{\theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \right] \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \frac{\psi_0^3}{3!} - \right. \\ & \left. - \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \psi_0 + \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{\psi_0^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 c_\rho}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi_0^3}{3!} \right] \right\} d\theta. \quad (15-5) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x_\sigma = \sin \theta \left\{ c_{\theta m} [(-\psi_0 + \alpha) - \delta] + \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m \frac{[(-\psi_0 + \alpha) - \delta]^2}{2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{[(-\psi_0 + \alpha) - \delta]^3}{3!} + \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{[(-\psi_0 + \alpha) - \delta]^4}{4!} \right\} + \xi_{\sigma\theta} - \varepsilon_{\sigma\theta}; \quad (15-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_\tau = \sin \theta \left\{ c_{\theta m} [(\psi_0 - \alpha) - \delta] + \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m \frac{[(\psi_0 - \alpha) - \delta]^2}{2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{[(\psi_0 - \alpha) - \delta]^3}{3!} + \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{[(\psi_0 - \alpha) - \delta]^4}{4!} \right\} + \xi_{\tau\theta} - \varepsilon_{\tau\theta}; \quad (15-7) \end{aligned}$$

заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_\theta = \frac{\xi_{\tau\theta} - \xi_{\sigma\theta}}{2} = \int_{\theta_I}^{\theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \frac{\psi_0^3}{3!} - \right. \\ \left. - \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \psi_0 + \left( \frac{\partial^3 c_\rho}{\partial \varphi^3} \right)_m \frac{\psi_0^3}{3!} \right] \right\}; \quad (15-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \xi_\theta = \frac{-\xi_{\tau\theta} - \xi_{\sigma\theta}}{2} \int_{\theta_I}^{\theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \left\{ - \frac{\partial}{\partial P} \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial c_\rho}{\partial \varphi} \right)_m \right] \frac{\psi_0^2}{2} + \right. \\ \left. + \rho^2 \frac{\partial F_m}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{\partial^2 c_\rho}{\partial \varphi^2} \right)_m \frac{\psi_0^2}{2} \right] \right\} d\theta; \quad (15-9) \end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\varepsilon_{\tau\theta} - \varepsilon_{\sigma\theta}}{2}; \quad \Delta \varepsilon_\theta = \frac{-\varepsilon_{\tau\theta} - \varepsilon_{\sigma\theta}}{2} \text{ подсчитаны нами раньше;}$$

$$\frac{\psi_\tau + \psi_\sigma}{2} = -\delta;$$

$$\frac{\psi_\tau - \psi_\sigma}{2} = \psi_0 - \alpha;$$

$$\frac{\psi_\tau^2 + \psi_\sigma^2}{2} = (\psi_0 - \alpha)^2 + \delta^2;$$

$$\frac{\psi_\tau^2 - \psi_\sigma^2}{2} = -2\delta(\psi_0 - \alpha);$$

$$\frac{\psi_\tau^3 + \psi_\sigma^3}{2} = -\delta^3 - 3\delta(\psi_0 - \alpha)^2;$$

$$\frac{\psi_\tau^3 - \psi_\sigma^3}{2} = (\psi_0 - \alpha)^3 + 3(\psi_0 - \alpha)\delta^2;$$

$$\frac{\psi_\tau^4 + \psi_\sigma^4}{2} = (\psi_0 - \alpha)^4 + \delta^4 + 6\delta^2(\psi_0 - \alpha)^2;$$

$$\frac{\psi_\tau^4 - \psi_\sigma^4}{2} = -4\delta(\psi_0 - \alpha)^3 - 4\delta^3(\psi_0 - \alpha).$$

Вычтем (15-6) из (15-7) и поделим пополам разность. Пренебрегаем степенями  $\delta$  выше первой ( $\delta$  — очень маленькая величина):

$$\bar{x} = \sin \theta \left\{ c_{\theta m} (\psi_0 - \alpha) - \delta (\psi_0 - \alpha) \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{1}{6} (\psi_0 - \alpha)^3 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m - \frac{1}{6} \delta (\psi_0 - \alpha)^2 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right\} + \bar{\xi}_\theta - \bar{\varepsilon}_\theta. \quad (15-10)$$

Отсюда

$$\delta = \frac{\left[ c_{\theta m} (\psi_0 - \alpha) + \frac{1}{6} (\psi_0 - \alpha)^3 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] \sin \theta - \bar{x} + \bar{\xi}_\theta - \bar{\varepsilon}_\theta}{(\psi_0 - \alpha) \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{1}{6} (\psi_0 - \alpha)^3 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m}. \quad (15-11)$$

Опять пренебрегая членами  $\delta$  выше первой степени, сложим (15-6) и (15-7) и сумму поделим пополам:

$$-\Delta x = \left[ -\delta c_{\theta m} + (\psi_0 - \alpha)^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m - \frac{1}{2} \delta (\psi_0 - \alpha)^2 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m + \frac{1}{24} (\psi_0 - \alpha)^2 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] \sin \theta - \Delta \xi_\theta + \Delta \varepsilon_\theta. \quad (15-12)$$

Подставим (15-11) в (15-12):

$$\begin{aligned} & \left[ (\psi_0 - \alpha) \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{1}{6} (\psi_0 - \alpha)^3 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] \times \\ & \times \left\{ \left[ (\psi_0 - \alpha)^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m - \frac{1}{24} (\psi_0 - \alpha)^2 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] \sin \theta + \Delta x - \Delta \xi_\theta + \Delta \varepsilon_\theta \right\} - \\ & - \left\{ c_{\theta m} (\psi_0 - \alpha) + \frac{1}{6} (\psi_0 - \alpha)^3 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \right\} \sin \theta - \bar{x} + \bar{\xi}_\theta - \bar{\varepsilon}_\theta \times \\ & \times \left[ c_{\theta m} + \frac{1}{2} (\psi_0 - \alpha)^2 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \sin \theta = 0, \quad (15-13) \end{aligned}$$

Помножив и приведя подобные члены, расположим многочлен по степеням  $(\psi_0 - \alpha)$ :

$$\begin{aligned} & (\psi_0 - \alpha)^5 \left[ -\frac{1}{144} \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \cdot \sin \theta + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m \cdot \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \cdot \sin \theta - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} \sin^2 \theta \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m^2 \right] + (\psi_0 - \alpha)^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m^2 \sin \theta - \frac{1}{24} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \sin \theta + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m (\Delta x - \Delta \xi_\theta + \Delta \varepsilon_\theta) - \frac{2}{3} c_{\theta m} \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \cdot \sin^2 \theta \Big] + \\
 & + (\psi_0 - \alpha)^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m (\bar{x} - \bar{\xi}_\theta + \bar{\varepsilon}_\theta) + (\psi_0 - \alpha) \left[ \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m \cdot (\Delta x - \Delta \xi_\theta + \Delta \varepsilon_\theta) - \right. \\
 & \left. - c_{\theta m}^2 \sin^2 \theta \right] + c_{\theta m} (\bar{x} - \bar{\xi}_\theta + \bar{\varepsilon}_\theta) \sin \theta = 0. \quad (15-14)
 \end{aligned}$$

Множители при степенях  $(\psi_0 - \alpha)$  соответственно обозначим через  $a, b, c$  и  $d$ .

Перепишем (15-14):

$$(\psi_0 - \alpha)^5 a + (\psi_0 - \alpha)^3 b + (\psi_0 - \alpha)^2 \cdot c + (\psi_0 - \alpha) d + e = 0. \quad (15-15)$$

Пренебрежем в (15-15) степенями  $a$  выше первой и получим, раскрыв скобки,

$$\alpha (5a\psi_0^4 + 3b\psi_0^2 + 2c\psi_0 + d) = \psi_0^5 a + \psi_0^3 b + \psi_0^2 c + \psi_0 d + e. \quad (15-16)$$

Соответственно обозначим множитель при  $\alpha$  и свободный член через  $L$  и  $T$ .

Отсюда из (15-16) получаем:

$$\alpha = \frac{T}{L}. \quad (15-17)$$

Теперь, чтобы подсчитать  $\alpha$  по (15-17), а затем  $\delta$  по (15-11), нужно определить  $\bar{x}$  и  $\Delta x$ .

Ясно, что на входе и выходе рабочего колеса (на кромках)  $\alpha = 0$ , определим теперь  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  так, чтобы они отвечали этому условию. Также вспомним, что  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  не должны зависеть от  $\theta$ .

Перепишем (15-11) при  $\alpha = 0$ :

$$\delta = \frac{\left[ c_{\theta m} \cdot \psi_0 + \frac{1}{6} \psi_0^3 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \sin \theta - \bar{x} + \bar{\xi}_\theta - \bar{\varepsilon}_\theta}{\psi_0 \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{1}{6} \psi_0 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m}$$

или

$$\delta = \frac{A - \bar{x}}{B}. \quad (15-11')$$

Если подставить (15-11') в (15-12) при  $\alpha = 0$ , то

$$\begin{aligned}
 -\Delta x = & \left[ \frac{c_{\theta m}}{B} + \frac{1}{2B} \psi_0^2 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m \right] \sin \theta \bar{x} - \sin \theta \left[ \frac{A}{B} c_{\theta m} - \right. \\
 & \left. - \psi_0^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_\theta}{\partial \varphi} \right)_m + \frac{1}{2} \frac{A}{B} \psi_0^2 \left( \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \varphi^2} \right)_m + \frac{1}{24} \psi_0^4 \left( \frac{\partial^3 c_\theta}{\partial \varphi^3} \right)_m \right] - \Delta \xi_\theta + \Delta \varepsilon_\theta \quad (15-18)
 \end{aligned}$$

или

$$-\Delta x = \bar{x} M + S. \quad (15-18')$$

Таким образом, для входа и выхода получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta x &= \bar{x}M_I + S_I; \\ -\Delta x &= \bar{x}M_{II} + S_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (15-19)$$

Если (15-19) уравнения совместные, то получаем:

$$\bar{x} = \frac{S_I - S_{II}}{M_{II} - M_I} \quad (15-20)$$

и

$$\Delta x = \frac{M_I S_{II} - M_{II} S_I}{M_{II} - M_I}. \quad (15-21)$$

Значит, прежде всего для определенного  $\rho$  получаем  $\bar{x}$  и  $\Delta x$  по (15-20) и (15-21), а затем, задавая  $\theta$ , определяем  $F_m$ ,  $\alpha$  по (15-17) и  $\delta$  по (15-11).

Отступив от  $F_m$  на угол  $\delta$ , получаем поверхность, делящую угловую ширину прохода пополам.

Отойдя от этой поверхности в обе стороны на угол  $\alpha$ , получаем поверхности давления и разрежения лопасти, т. е. мы автоматически получаем толстую лопасть.

### Литература

1. L. A. Dreyfus, A three-dimensional theory of turbine flow and its application to the design of wheel vanes for propeller and Francis turbine, Stockholm, 1946.
2. В. С. Квятковский, Рабочий процесс осевой турбины, ч. I и II, Машгиз, 1951 — 1952.
3. Л. И. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, М. — Л, Гостехиздат, 1946.
4. Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций, ОНТИ, 1933.
5. Д. Я. Суханов, Работа лопастных насосов на вязких жидкостях, Машгиз, 1952.
6. Иван Николаевич Вознесенский, Машгиз, 1952.
7. Л. А. Симонов, О пространственном потоке в гидромашинах, „Прикладная математика и механика“ т. V, вып. 3, 1941.